

Alpenpanoramen

Das Alpenpanorama (nicht nur) in Zahlen



Im Januar 2025

Dr. Bernd Ragutt

Inhaltsverzeichnis

1	Die Antriebskräfte.....	3
1.1	Am Dampfersteg in Starnberg.....	3
1.2	Auf dem Steinberg über Gilching.....	3
1.3	Mehr Gewissheit muss her!.....	6
2	Das Thema abtasten!.....	7
2.1	Was ist der Horizont?.....	7
2.2	Die Größenordnung des Höhenwinkels.....	7
2.3	Die verschwindende Zugspitze.....	8
2.4	Der Berggipfel hinterm Krümmungsberg.....	11
3	Erläuterungen zur Berechnungsweise.....	13
3.1	Die Bestimmung des Horizontpunktes.....	13
3.2	Der Höhenwinkel.....	16
3.3	Die UTM-Koordinaten.....	17
3.4	Der Abstand und der Richtungswinkel.....	18
3.5	Die Berechnung des Höhenwinkels.....	21
4	Anwendungen.....	23
4.1	Die Vorgehensweise bei der Auswertung von Fotos.....	23
4.2	Das Alpenpanorama am Dampfersteg in Starnberg.....	24
4.3	Das Alpenpanorama vom Steinberg aus.....	28
	Anhang.....	31
A.	Die lineare Interpolation mit Makros.....	31
B.	Dies und das zum oblaten Ellipsoid.....	32
C.	Die Längenkorrektur durch die Abbildungsreduktion.....	36
D.	Die Überprüfung der Abstände und Winkel.....	37
	Verweise und Literatur.....	40

1 Die Antriebskräfte

1.1 Am Dampfersteg in Starnberg

Es gab mehrere Anstöße, die mich veranlassten, das Thema Alpenpanoramen aufzugreifen. So war es eine Freude, mit dem Nachwuchs am Dampfersteg in Starnberg zu stehen, über den See zu schauen und sich durch die hübsch aufgemachte Informationstafel aufklären zu lassen über das, was man so Alpines dort hinten am Horizont sehen konnte – und die Freude war umso größer, wenn man das Gesehene bereits zu Fuß erkundet hat, wie etwa die Benediktenwand.

Nicht zu wissen, was man sieht? Jedes Ding braucht seinen Namen! Blicke auf die Alpenkette am Horizont tun sich im Voralpenland des Öfteren auf, wenn man nicht gerade die Tallage auf seinen Landpartien bevorzugt; aber selbst hier in der vorwiegend flachen Münchner Schotterebene eröffnen sich ab und an und oft nur auf wenige Meter solche Blicke in die Ferne. Schautafeln würde man vergeblich suchen, aber ich spreche gerne, wenn sich die Gelegenheit bietet und der Zufall es will, diejenigen an, die auch unterwegs sind - nahezu immer ohne Erfolg. Selbst mundartlich als Einheimische erkannte bekennen, dass ihnen dieser markante graue Kegel am Horizont schon aufgefallen sei, gestehen aber gleichzeitig freiweg ihr Unwissen, um was es sich da handelt. Die Weitergabe eines traditionellen Wissens vom Großvater zu den Enkeln scheint es nicht mehr zu geben – denkt sich der unbedarfte Zugereiste.

1.2 Auf dem Steinberg über Gilching

Es erfreut den Ausflügler im Voralpenland, wenn sich etwa auf dem Weg zum Weißlinger See beim Steinberg¹ über Gilching der Blick hin zum Horizont öffnet, umso mehr freut es, wenn gleich auch eine ausladende Schautafel ins Auge springt. Die Freude währte hier vor Ort allerdings nur kurz, ich konnte die offenichtlich schnell hingeworfene Skizze partout nicht zur Deckung bringen mit dem, was ich am Horizont sah. Selbst die doch so markante Silhouette der Zugspitze half nicht, sie in dieser Skizze voll mit Buckeln zu finden, ich musste nach dem Namen suchen. Sogar die Kreuzspitze, die ihren Namen zu Recht trägt, hat ihre Spitze verloren und ist dem schnellen Stift rundbuckelig zum Opfer gefallen. Kopfschüttelnd „Wie kann man nur!“ murmelnd, setzte ich die Wanderung fort.

Dieses „Wie kann man nur!“ gab immerhin den Anstoß, das Corpus Delicti unter die Lupe zu nehmen. Ich hatte nur meine schnell geschossenen, unansehnlichen Fotos der Schautafeln (Abbildung 1) im smarten Phon, suchte deshalb und fand im Internet ansehnliche *Nahezu*-Duplikate der beiden Schautafeln; *Nahezu*-Duplikate, denn die mir bisher unbekannte „Arnspitze“ war - wie mir gleich auffiel - aus der Internet-Version getilgt worden.

(1) Gleich unterhalb vom „Am Rinnerhof 1“

Es dürfte sich bei diesem Gipfel in der hinteren Reihe um die „Große Arnspitze“ handeln, die von Gilching aus eigentlich zwischen dem Hirsch- und Simetsberg liegen sollte; Hirsch- und Simetsberg sind gut identifizierbare Gipfel, gelegen zwischen dem Heimgarten und der Oberen Wettersteinspitze; die Schautafel führt die Arnspitze allerdings auf.

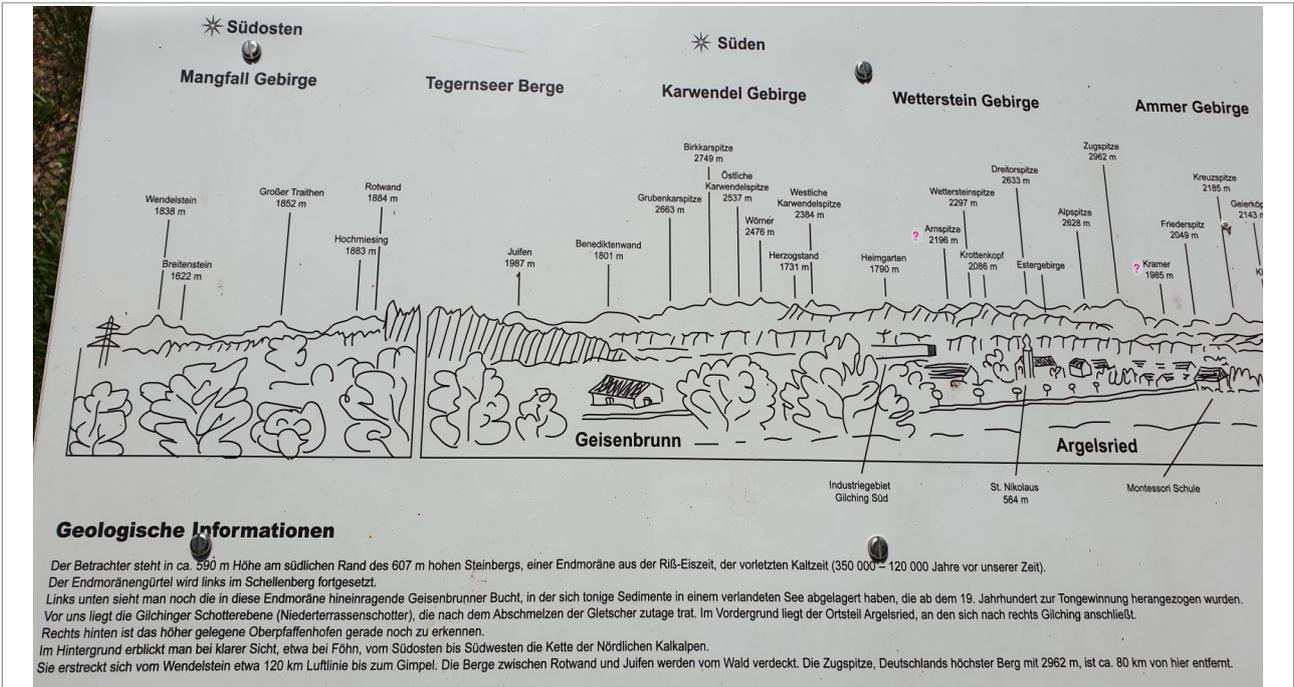


Abbildung 1: Mein Foto der Panoramatafel (Ausschnitt) am Steinberg über Gilching

In der oben abgebildeten Schautafel wird der „Süden“ durch eine Kompassrose angedeutet, die unveränderliche geografische Südrichtung wäre allerdings über dem „Herzogstand“ zu verorten - was leicht zu überprüfen ist, denn der Gilchinger Beobachterstandort und der Herzogstand liegen auf derselben geografischen Länge 11,31°.

Warum tat unsereins sich schwer, per Mustererkennung die angebotene Skizze mit dem Gesehenen zur Deckung zu bringen? In der folgenden Abbildung 2 habe ich einen Ausschnitt der Panoramatafel einem von mir aufgenommenen Foto gegenübergestellt. Die beiden roten Balken markieren jeweils den Bereich von der Zugspitze bis zur weiter westlich gelegenen Kreuzspitze, der untere Balken markiert den entsprechenden Bereich im Foto. Mein Fazit: Da passt nichts zusammen.

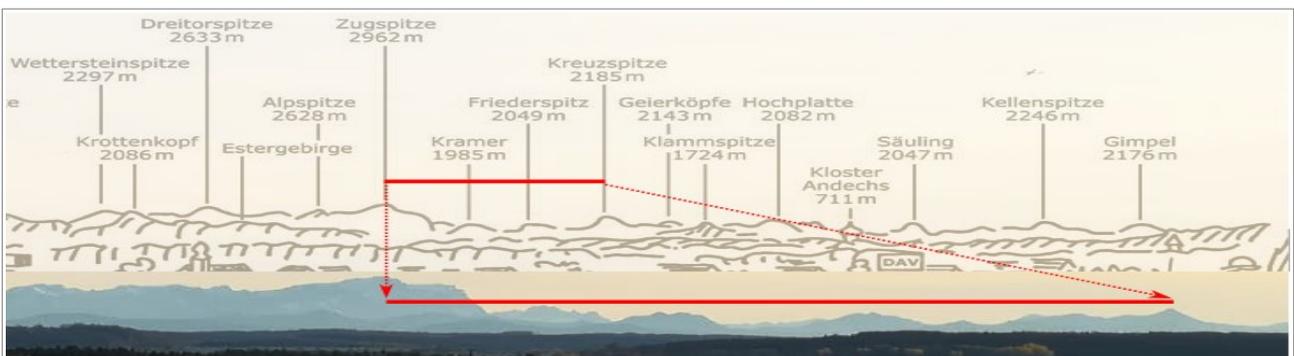
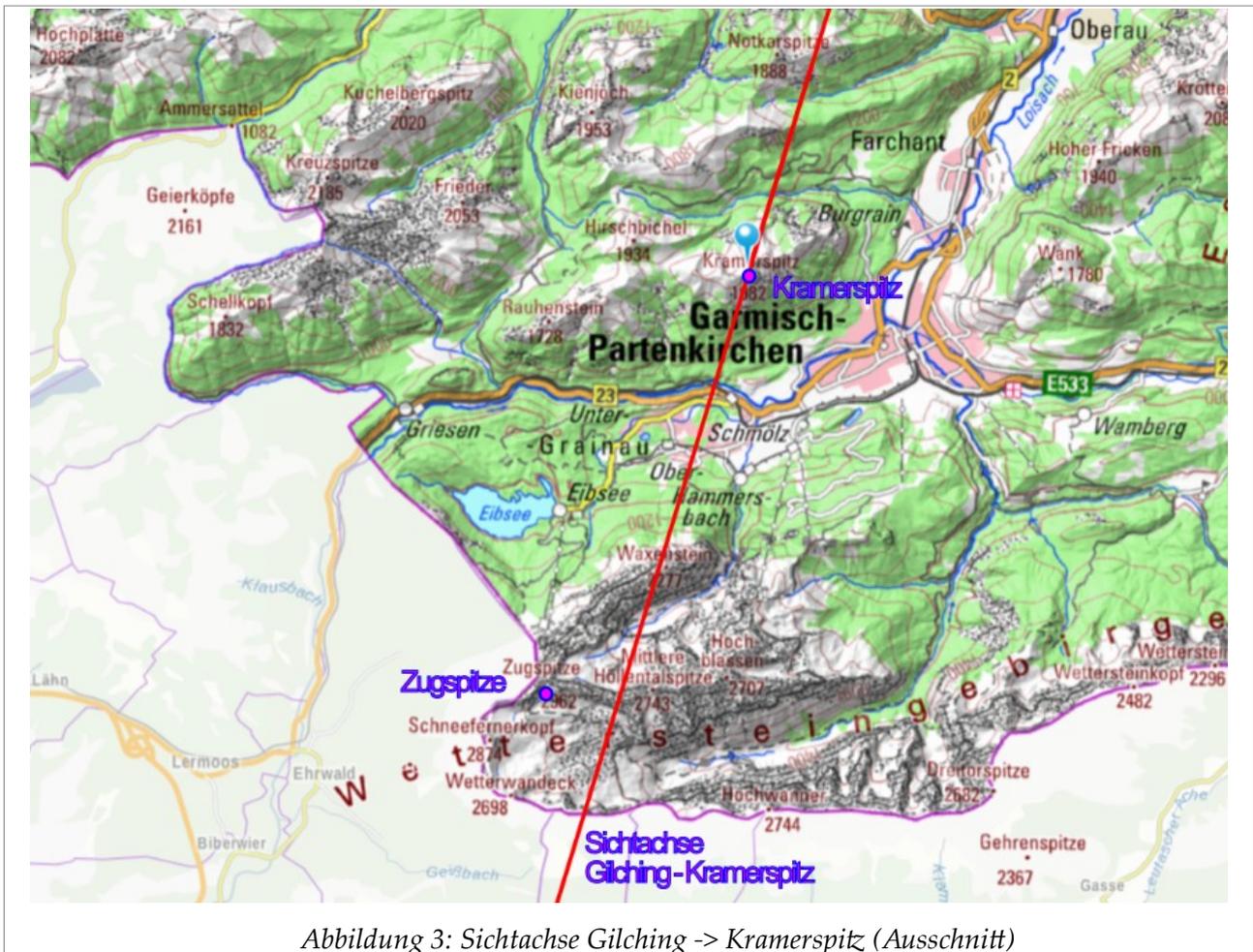


Abbildung 2: Panoramatafel (Ausschnitt) gegen die reale Welt im Foto

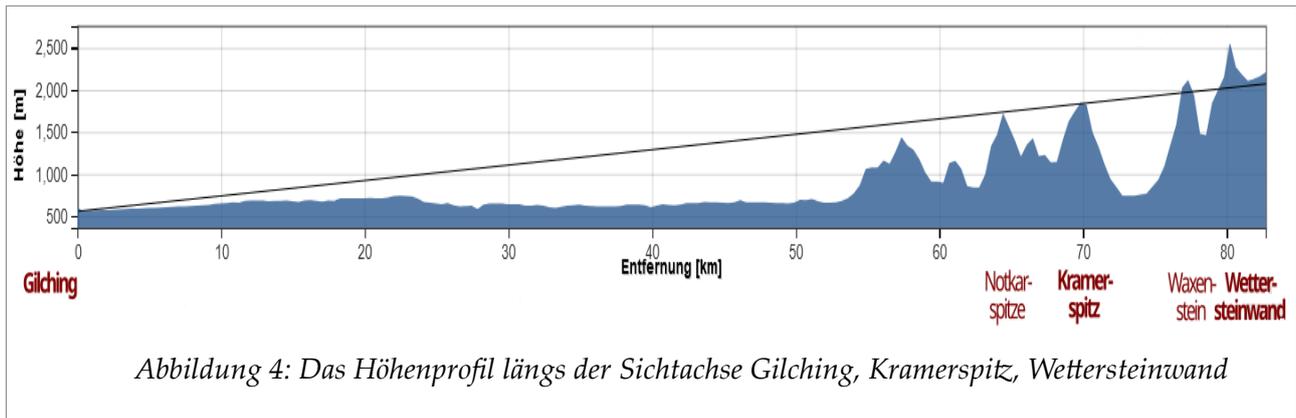
Der „Kramer“ oder doch nicht der „Kramer“? Rechts neben der Zugspitze in den obigen Abbildungen 1 und 2, also westlich von ihr, führt die Schautafel den Kramer auf. Laut meinen Rechnereien ist die Zugspitze in der azimuthalen Richtung² 197,72° und die Klammspitz in Richtung 196,50° zu sehen, also gut 1° östlich der Zugspitze. Meine Berechnungen könnten natürlich auch fehlerhaft sein, deshalb lege ich noch zwei weitere Abbildungen 3 und 4 nach.



Der Kramerspitz liegt vom Gilchinger Standort aus gesehen ein klein wenig, nämlich 1,22° Winkelgrade, östlich der Zugspitze, wie die Abbildung 3 zeigt; auf der Gilchinger Panoramatafel liegt sie um einiges westlich der Zugspitze - ungefähr da, wo ich den Grünstein verortet habe.

Das Höhenprofil in der nächsten Abbildung 4 zeigt die gesamte Sichtachse von Gilching über den Kramerspitz bis zur Wettersteinwand und klärt die Frage der Sichtbarkeit der Kramerspitz von Gilching aus recht unzweideutig.

(2) Azimut im Uhrzeigersinn gegen geografisch Nord



Der Kramerspitze wird nämlich bis zur Spitze hin bereits von der Notkarspitze verdeckt, wäre ansonsten aber sowieso kaum markant sichtbar vor der Wettersteinwand, weil unterhalb deren Wandkante gelegen.

1.3 Mehr Gewissheit muss her!

Warum echauffiere ich mich hier solchermaßen über solch Lappalien? Nun denn, sie waren der letzte Anstoß, diese Arbeit nicht schon wieder - wie schon des Öfteren geschehen - niederzulegen, sondern sie sauber zu beenden.

In die gleiche Kerbe schlug ein zufällig gelesener Kommentar, gelesen in den Tiefen und Untiefen des Internets: Auf den Seiten von ‚alpen-panoramen.de‘ gibt es wunderschöne Panoramabilder der Alpen zu bewundern mit unglaublich vielen (oder unglaublichen?) Beschriftungen selbst von kurz geratenen Alpengipfeln. Eines dieser Panoramen begann mit einem einsam in der noch flachen Landschaft stehenden Vorgebirgeberg. Der allererste Kommentator wies korrigierend aber verständnisvoll darauf hin, dass dieser Vorgebirgeberg nicht der Berg A sondern der Berg B sei. Diese Verwechslung käme öfters vor.³

Meine Schlussfolgerung: Man braucht mehr Gewissheit über die Gipfelnamen, die man in Panoramabildern unterbringt oder sieht.

In den Kapiteln 4.2 ‚Das Alpenpanorama am Dampfersteg in Starnberg‘ und Fehler: Verweis nicht gefunden, ‚Das Alpenpanorama von Gilching aus‘ habe ich mein Verfahren angewandt und des Tochtters brauchbare und meine halbwegs brauchbaren Fotos mit Gipfelnamen versehen. Es lief wesentlich besser, mit weniger zeitlichem Aufwand, als ich es erwartet hatte.

(3) Ich bin zu faul, noch einmal die Seiten von alpen-panoramen.de durchzuwühlen, um den Kommentar belegen zu können.

2 Das Thema abtasten!

2.1 Was ist der Horizont?

Ich tat mich ziemlich lange schwer mit dieser Frage, denn was ein Beobachter am Rande seines Gesichtskreises vor Ort zu sehen bekommt, hängt wesentlich von den örtlichen Gegebenheiten ab, der Topografie vor Ort, der Bebauung, dem Pflanzenwuchs, aber auch von den atmosphärischen Bedingungen – im Dunst sieht man wenig. Je höher der Beobachter allerdings seinen Standort wählen kann, umso weiter kann er sehen; da reichen oft schon wenige Meter Höhengewinn auf dem Acker und der Neugierige entdeckt ein Alpenpanorama hinter dem Getreidefeld.

Nach langem Hin und Her meinerseits darüber, wie man örtliche Gegebenheiten einbeziehen könnte, kam die Einsicht, dass der nautische Horizont der einzig sinnmachende Bezugshorizont sei für meine Berechnungen der Höhenwinkel von fernen Bergen über ‚dem Horizont‘. Bezogen auf den nautischen Horizont erhält man zumindest die maximal⁴ möglichen Werte für die Elevationen der Gipfel; vom realen Beobachtungsort aus sind diese Werte vom Beobachter dann nur relativ zu interpretieren, etwa bezogen auf den höchsten Gipfel im Gesichtskreis – mehr geht nicht.

2.2 Die Größenordnung des Höhenwinkels

Die Welt sei jetzt keine gekrümmte sondern eben und der Beobachter sei winzig, etwa eine intelligente Ameise.

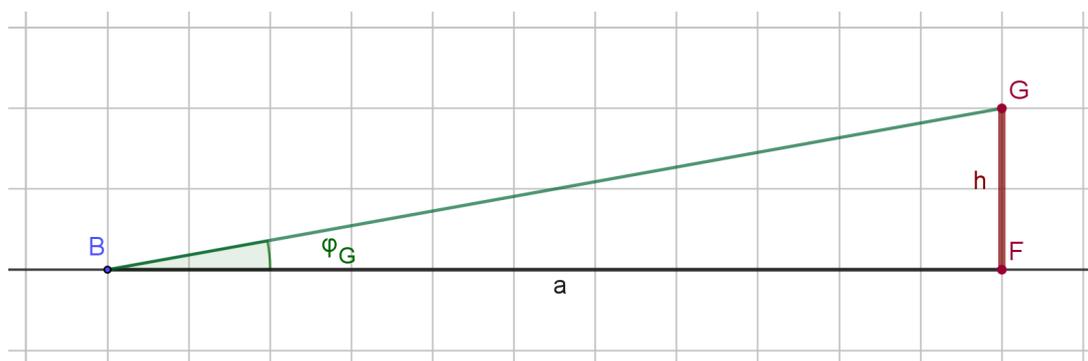


Abbildung 5: Höhenwinkel eines Gipfels in einer ebenen Welt

$$\tan(\varphi_G) = \frac{h}{a} \quad \varphi_G = \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$\varphi_G = \frac{h}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \dots\right) \quad a \gg h$$

In dieser flachen Welt ergibt sich von einem virtuellen Standort B in Dachau aus für die Zugspitze G der nebenstehende, auf 2 Dezimalstellen gerundete Höhenwinkel φ_G für den Beobachter B.

Die Zugspitze aus der Ferne gesehen

$a=98,9$ km

$h=2962$ m

$\varphi_G = 1,72^\circ$

(4) Optische Effekte durch Luft und Wetter lasse ich unter den Tisch fallen.

Die Größenordnung des 1. Korrekturterms liegt bei wenigen Bogensekunden und betrifft nur die 4. Dezimalstelle.	$\frac{1}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^3 = 0,00051^\circ = 1,9''$
--	--

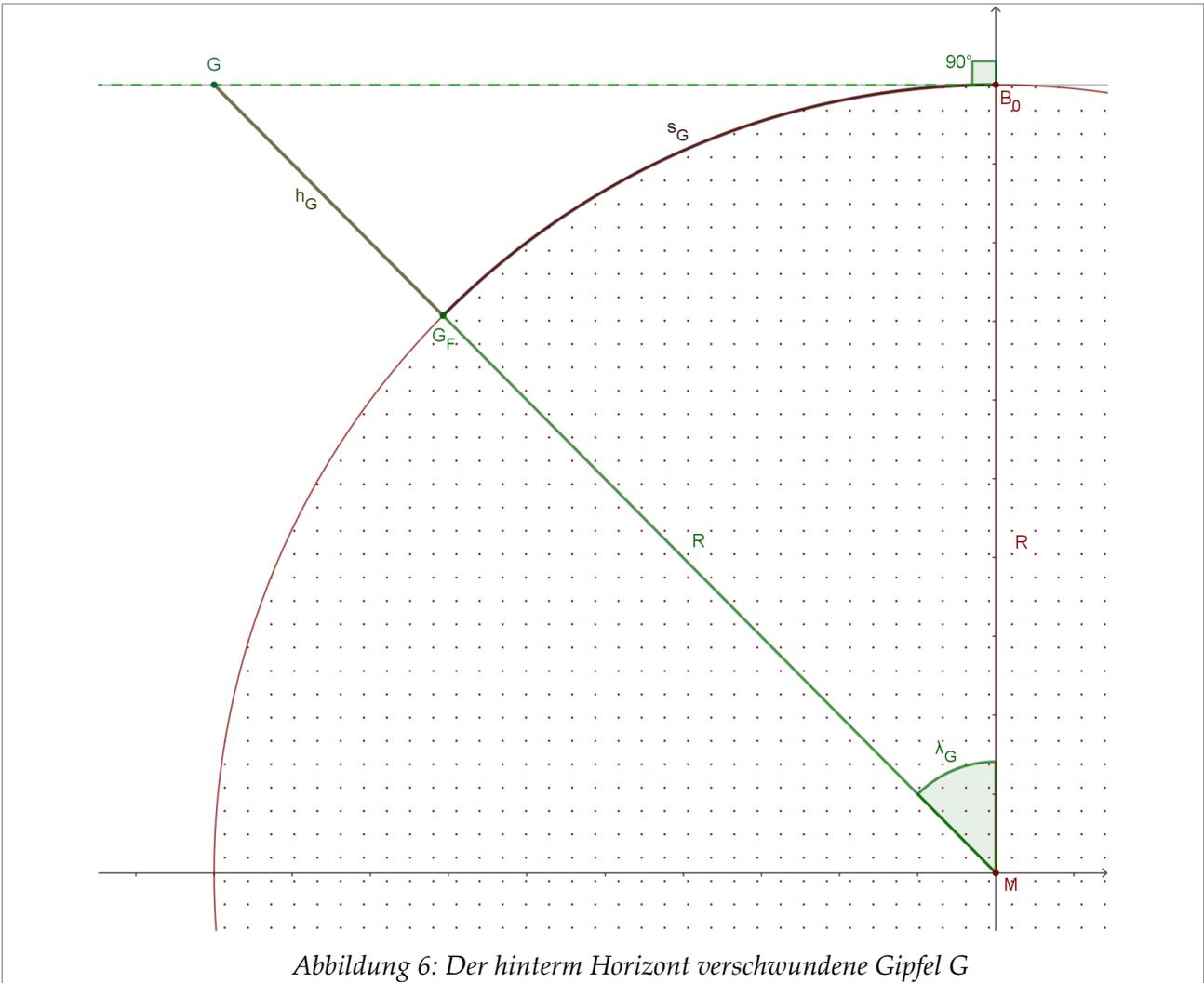
Der für eine gekrümmte Erde sich ergebende Höhenwinkel – für einen Beobachter, der oben im Schlosspark 510 Meter hoch in Dachau steht und auf einen Horizont in Meereshöhe schaut -, ist nur ein klein wenig niedriger, der kümmerlichen Erdkrümmung wegen; nur ein kleiner Teil des Gipfelfußes liegt hinter dem weit entfernten Horizont des Betrachters, denn dieser gedachte Horizont auf Meereshöhe liegt in einer Entfernung von 81 km nur knapp 20 km vor dem Gipfelfuß der Zugspitze.

2.3 Die verschwindende Zugspitze

Es ist ein gerne gebrauchtes Bild, welches kaum einen Zweifel daran lässt, dass der Mensch nicht auf einer flachen Scheibe lebt: Vom Dampfer am Horizont verschwindet nach und nach von unten nach oben zuerst der Rumpf, zuletzt ist nur noch der Schornstein zu sehen, am Ende bleiben die schwarzen Rauchschwaden des Schiffsdiesels als Hinweis auf den verschwundenen Dampfer.

Umso erstaunlicher erscheint es da, dass sich zu Zeiten des Christoph Kolumbus unter den Seeleuten der aufblühenden Schifffahrt ein Glaube an das Ende der Welt und den unvermeidlichen Absturz in die Höllenabgründe erhalten konnte. Nun denn, auch heutzutage glauben nicht nur querdenkende Menschen an die seltsamsten, schier unglaublichen Dinge. Nun zu den handfesten Gegebenheiten.

In der nächsten Abbildung 6 ist für einen Beobachter B_0 in einer stark gekrümmten kugelförmigen Welt der Schornstein eines Dampfschiffes oder auch der Gipfel G eines Berges gerade hinter seinem Horizont verschwunden. Der Horizont dieses Beobachters liegt hier direkt zu seinen Füßen.

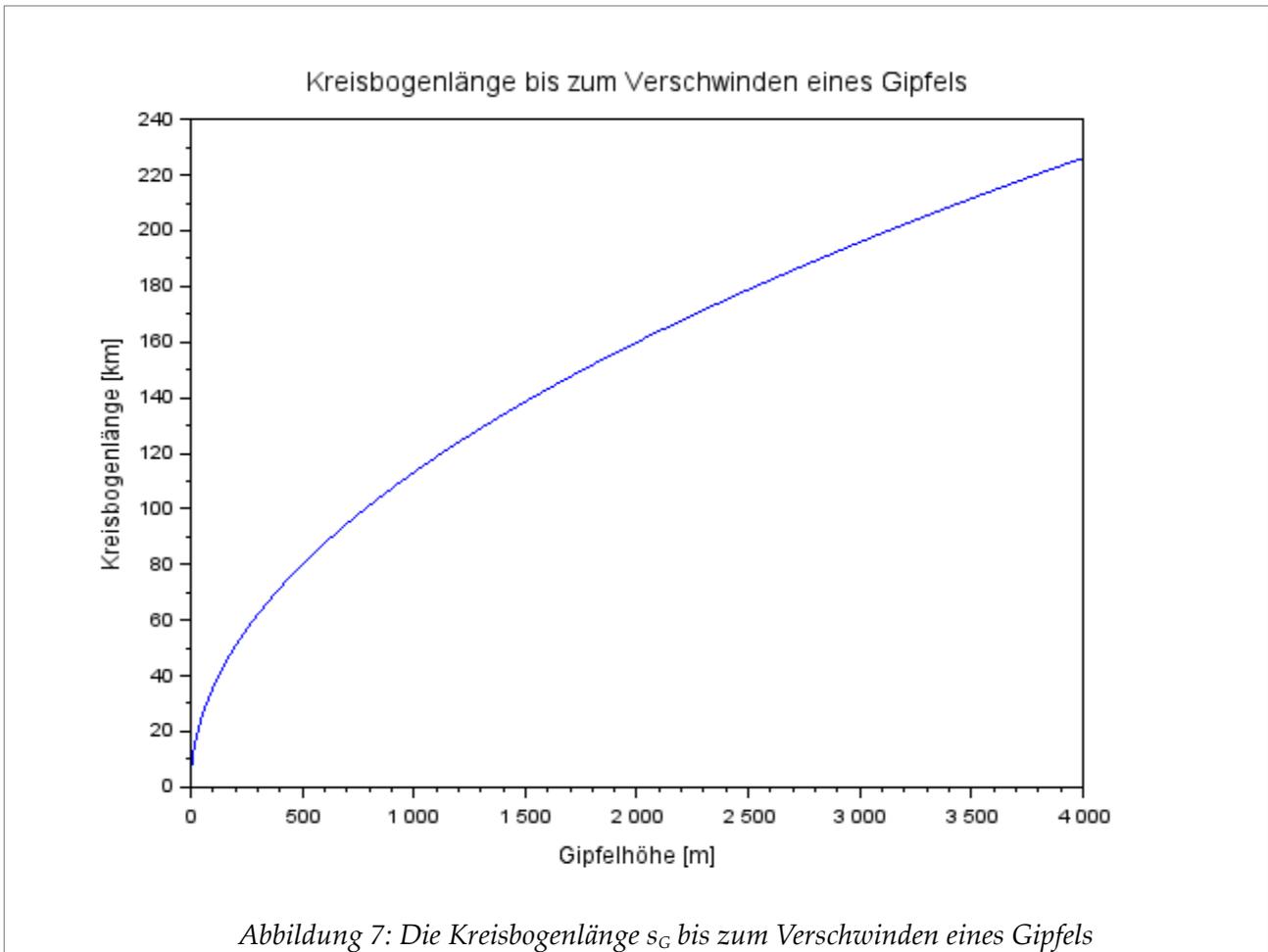


Der Kreisbogen s_G vom Beobachter B_0 auf der Höhe 0m zum Gipfelfußpunkt G_F des Berges hat gerade die Länge, bei der der Beobachter den Gipfelpunkt G des h_G -Meter hohen Berges gerade nicht mehr sieht. Die Länge dieses Kreisbogens wird bestimmt durch den Kreissektorwinkel λ_G , der sich sofort aus dem rechtwinkligen Dreieck MB_0G ergibt:

$\cos(\lambda_G) = \frac{R}{R+h_G}$	Kreissektorwinkel $\lambda_G = \arccos\left(\frac{R}{R+h_G}\right)$
Kreisbogenlänge $s_G = \lambda_G \cdot R$	$s_G = R \cdot \arccos\left(\frac{1}{1+h_G/R}\right)$

Hier zunächst einige Beispiele für die Bogenlänge s_G bis zum Verschwinden des entsprechenden Objektes der Höhe h_G und daran anschließend der Kurvenverlauf in einer grafischen Darstellung (Abbildung 7):

Erdradius	R = 6400 km	Kreisbogenlänge
Zugspitze	$h_G = 3000$ m	$s_G = 195,9$ km
wolkenkratzer	$h_G = 300$ m	$s_G = 62,0$ km
kirchtürmchen	$h_G = 30$ m	$s_G = 19,6$ km
segelschiffchen	$h_G = 3$ m	$s_G = 6,2$ km



Der Kurvenverlauf in der obigen Abbildung 7 sieht mir ganz so aus, als würde da die Quadratwurzel mitspielen. Um für eine Näherungsformel die Funktion \arccos in der Umgebung von 1 (für $h_G=0$) entwickeln zu können, hilft mir eine Umformung in den \arctan , wie die nächsten Zeilen zeigen.

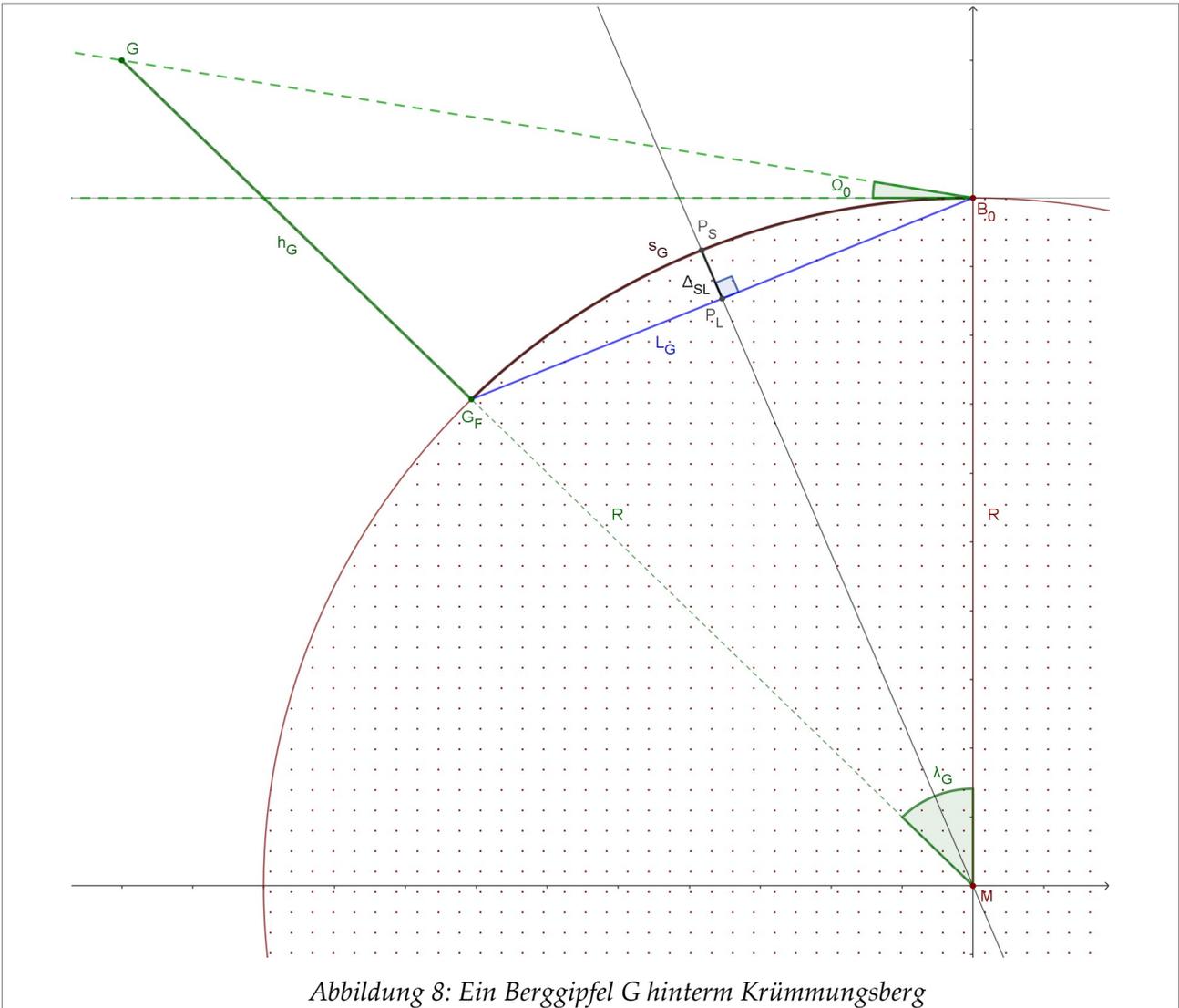
<p>Definition von q:</p> $1-q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{R+h_G} \quad q = \frac{h_G}{R+h_G}$	$\arccos\left(\frac{R}{R+h_G}\right) = \arccos(1-q)$
<p>Umformung des \arccos in den \arctan⁵:</p> $\arccos(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$	<p>Entwicklung des \arctan um den Nullpunkt:</p> $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad \text{für } x \ll 1$
$\arccos(1-q) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{2-q}}\right) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{h_G}{2R+h_G}}\right)$	
<p>Damit erhält man eine Näherungsformel der Bogenlänge für kleine Höhen.</p>	$s_G = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_G} + \dots \quad \text{für } h_G \ll R$

Und in der Tat, s_G wächst mit der Wurzel von h_G . Mit den obigen runden Daten für die Zugspitze ergibt sich schon in der ersten Näherung ein brauchbarer Wert $s_G \approx 196,0$ km.

(5) Die Wikipedia hilft hier und anderswo!

2.4 Der Berggipfel hinterm Krümmungsberg

Die Erdkrümmung ist zwar gering, so dass sie im alltäglichen Leben kaum eine Rolle spielt, wenn allerdings nur die Spitze eines Berggipfels zu sehen ist, dann zeigt sie ihre Wirkung. Und diese Wirkung lässt sich, wie die nächste Abbildung 8 und die nachfolgenden Rechnereien verdeutlichen sollen, so versinnbildlichen, dass der Beobachter (in der Abbildung B_0 genannt) hier im Beispiel vor einem ausgedehnten 200 Meter hohen Krümmungsbergelein steht und ‚hoch‘ zum 50 km entfernten Berggipfel (P_S) blickt. Die Höhe dieses Krümmungsberges (Δ_{SL} in der Abbildung 8) soll nun bestimmt werden.



Die Sekantenlänge L_G bei gegebener Kreisbogenlänge s_G lässt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck, das durch die 3 Punkte M , P_L und B_0 definiert ist, ablesen:

$\sin(\lambda_G/2) = \frac{L_G/2}{R}$ $L_G = 2 R \cdot \sin(\lambda_G/2)$	$s_G = \lambda_G \cdot R \quad L_G = 2 R \cdot \sin\left(\frac{s_G}{2R}\right)$
$L_G = s_G \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(\frac{s_G}{2R}\right)^2 + \dots\right) \quad s_G \ll 2R$	$(s_G - L_G) \sim \left(\frac{s_G}{2R}\right)^2 \quad s_G \ll 2R$

Für einen kleinen Bogenabstand s_G ist der direkte Luftlinienabstand L_G kaum kürzer als der Kreisbogen und die Differenz wächst auch nur langsam, nämlich quadratisch, mit wachsendem s_G .	$R = 6400 \quad \text{km}$ $s_G = 100 \quad \text{km}$ $L_G = 99,999 \quad \text{km}$ $s_G - L_G = 1 \quad \text{m}$
--	---

Die Sekante ist also in unserem Beispiel nur 1 m kürzer als der Kreisbogen. Das mag überraschen, wenn man sich von den kleinen Dimensionen der Abbildung 8 leiten lässt, nur ist die Krümmung der Erdoberfläche über die immer noch kleine Distanz von 100 Kilometern im Verhältnis zum Erdradius fast zu vernachlässigen, wie der nächste Rechenschritt zeigt.

Der maximale Abstand Δ_{SL} des Kreisbogens s_G von der Sekante L_G , also der direkten Verbindung per Luftlinie vom Beobachter B_0 zum Gipfelfußpunkt G_F , ist gegeben durch:

$\cos(\lambda_G/2) = \frac{R - \Delta_{SL}}{R} \quad \frac{\lambda_G}{2} = \frac{s_G}{2R}$	$\Delta_{SL} = R \cdot (1 - \cos(\frac{s_G}{2R}))$
$\Delta_{SL} = R \cdot \frac{1}{2!} (\frac{s_G}{2R})^2 + \dots \quad s_G \ll R$	$\Delta_{SL} = s_G \cdot \frac{1}{2^2} (\frac{s_G}{2R}) + \dots \quad s_G \ll R$

Für kleine Bogenlängen s_G sind also sowohl die Sekantenlänge L_G als auch der maximale Abstand Δ_{SL} von Sekante und Kreisbogen kleine Größen; allerdings wächst die Länge L_G mit wachsendem s_G langsamer, nämlich mit dem Quadrat des Quotienten $s_G/(2R)$, wächst also ein ganzes Stück langsamer als der Abstand Δ_{SL} , der nur linear von diesem Quotienten abhängt.

Der hügelhafte Krümmungsberg in Abbildung 8 hat immerhin eine Höhe von 195 m, dessen Krümmungsgipfel allerdings 50 km vom Betrachter entfernt ist.	$R = 6400 \quad \text{km}$ $s_G = 100 \quad \text{km}$ $\Delta_{SL} = 195 \quad \text{m}$
--	---

3 Erläuterungen zur Berechnungsweise

Ich verwende im Folgenden Kreise und nicht Ellipsen, um die geometrischen Daten abzuleiten, die ich in meinen Python-Algorithmen verwende. Das würde bereits Sinn machen, wenn eine kugelförmige Erde mit einem gewählten gemittelten Radius, etwa mit dem Mittelwert der Länge der Halbachsen, hinreichend genaue Ergebnisse lieferte. Ich wollte spontan, ohne allzu großes Nachdenken, einen Schritt weiter gehen und approximiere das relevante Ellipsoid namens GRS80 durch eine Schmiegekugel, die sich dem Ellipsoid im Beobachterstandort⁶ bestmöglich anschmiegt; als Radius dieser Schmiegekugel wird das geometrische Mittel der beiden lokalen Hauptkrümmungsradien gewählt.

3.1 Die Bestimmung des Horizontpunktes

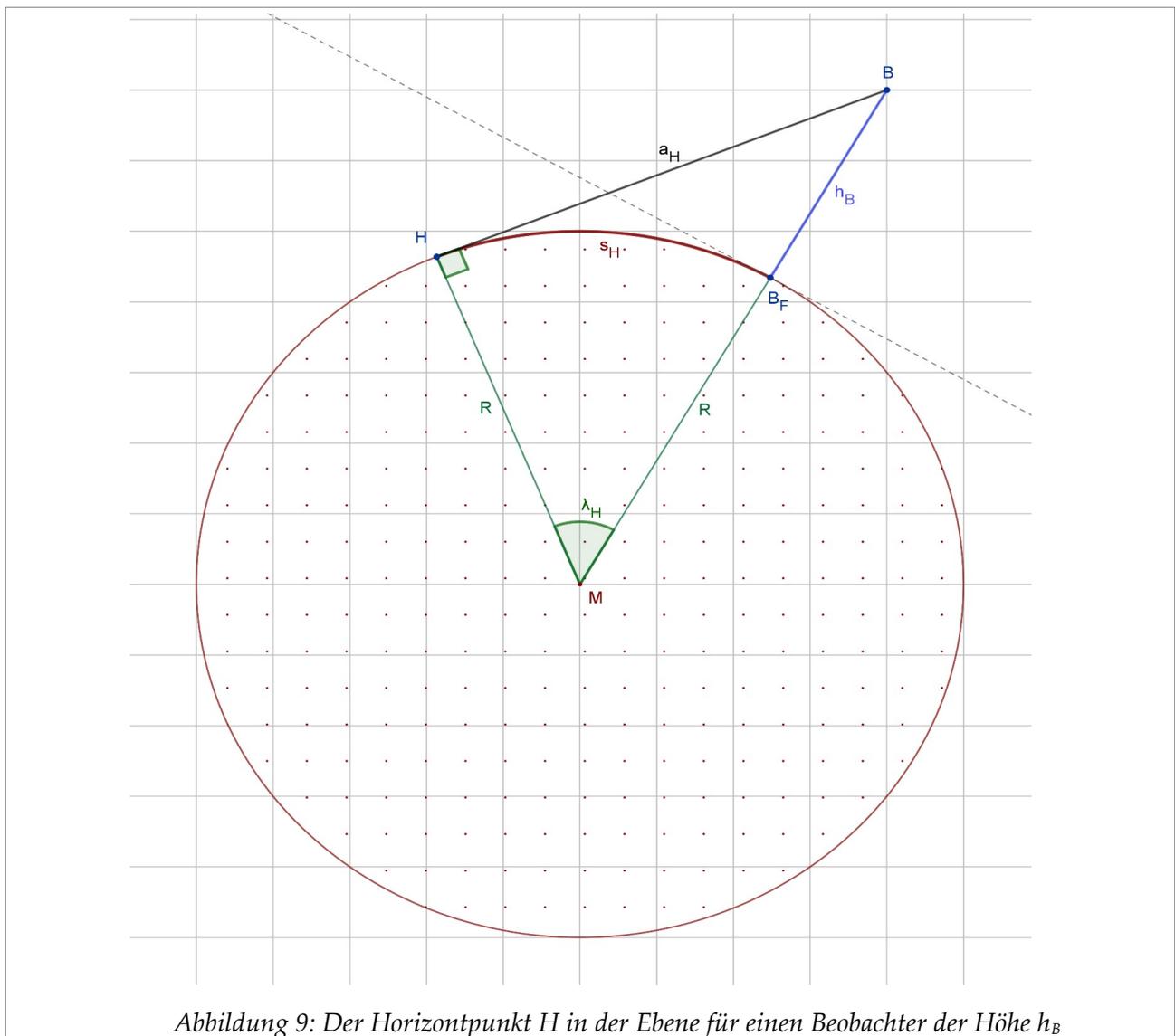


Abbildung 9: Der Horizontpunkt H in der Ebene für einen Beobachter der Höhe h_B

(6) Genauer: Dem Punkt anschmiegt, den ich Beobachterfußpunkt nenne.

Der geradlinige Abstand a_H in der Abbildung 9 vom Beobachter B zum Horizontpunkt H bestimmt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Punkten M, B und H wie folgt:

$\cos(\lambda_H) = \frac{R}{R+h_B} \quad \tan(\lambda_H) = \frac{a_H}{R}$	$a_H = R \cdot \tan(\lambda_H) = R \cdot \frac{\sin(\lambda_H)}{\cos(\lambda_H)}$
$a_H = R \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\lambda_H)}}{\cos(\lambda_H)}$	$a_H = \sqrt{2 R \cdot h_B + h_B^2}$
$a_H = \sqrt{2 R \cdot h_B} \cdot \sqrt{1 + \frac{h_B}{2R}}$	$a_H = \sqrt{2 R \cdot h_B} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{h_B}{R}\right) + \dots\right) \quad h_B \ll R$

Und weiter: Die Entfernung s_H vom Beobachter B zum Horizont H entlang der gekrümmten Erde, hier also entlang des Kreisbogens s_H , ergibt sich mit den folgenden Rechenschritten.

$\lambda_H = \arctan\left(\frac{a_H}{R}\right)$	$\lambda_H = \frac{a_H}{R} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a_H}{R}\right)^2 + \dots\right) \quad a_H \ll R$
$s_H = R \cdot \lambda_H$	$s_H = a_H \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a_H}{R}\right)^2 + \dots\right) \quad a_H \ll R$
R = 6400 km h _B = 500 m	a _H = 80.001,6 m s _H = 79.997,4 m a _H - s _H = 4,2 m

Die beiden Abstände a_H und s_H unterscheiden sich auch für größere Beobachterhöhen h_B nur um wenige Meter, hier um 4,2 m.

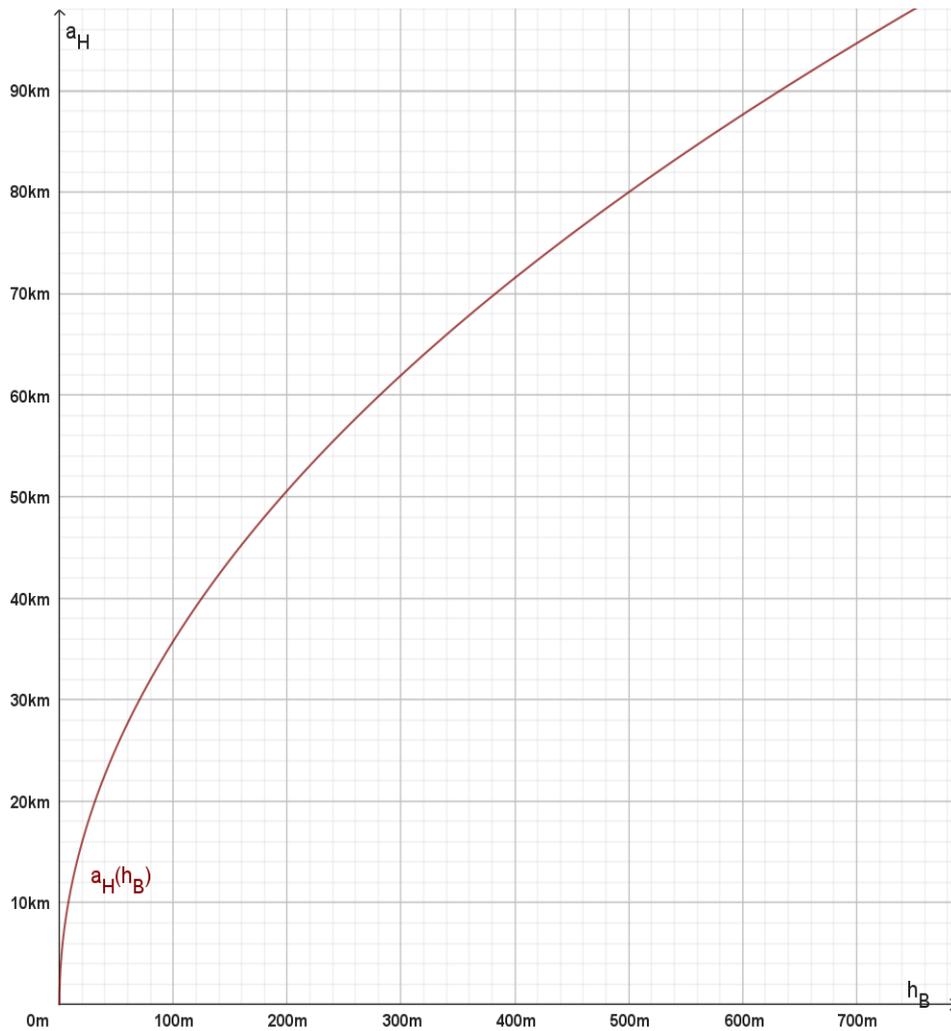
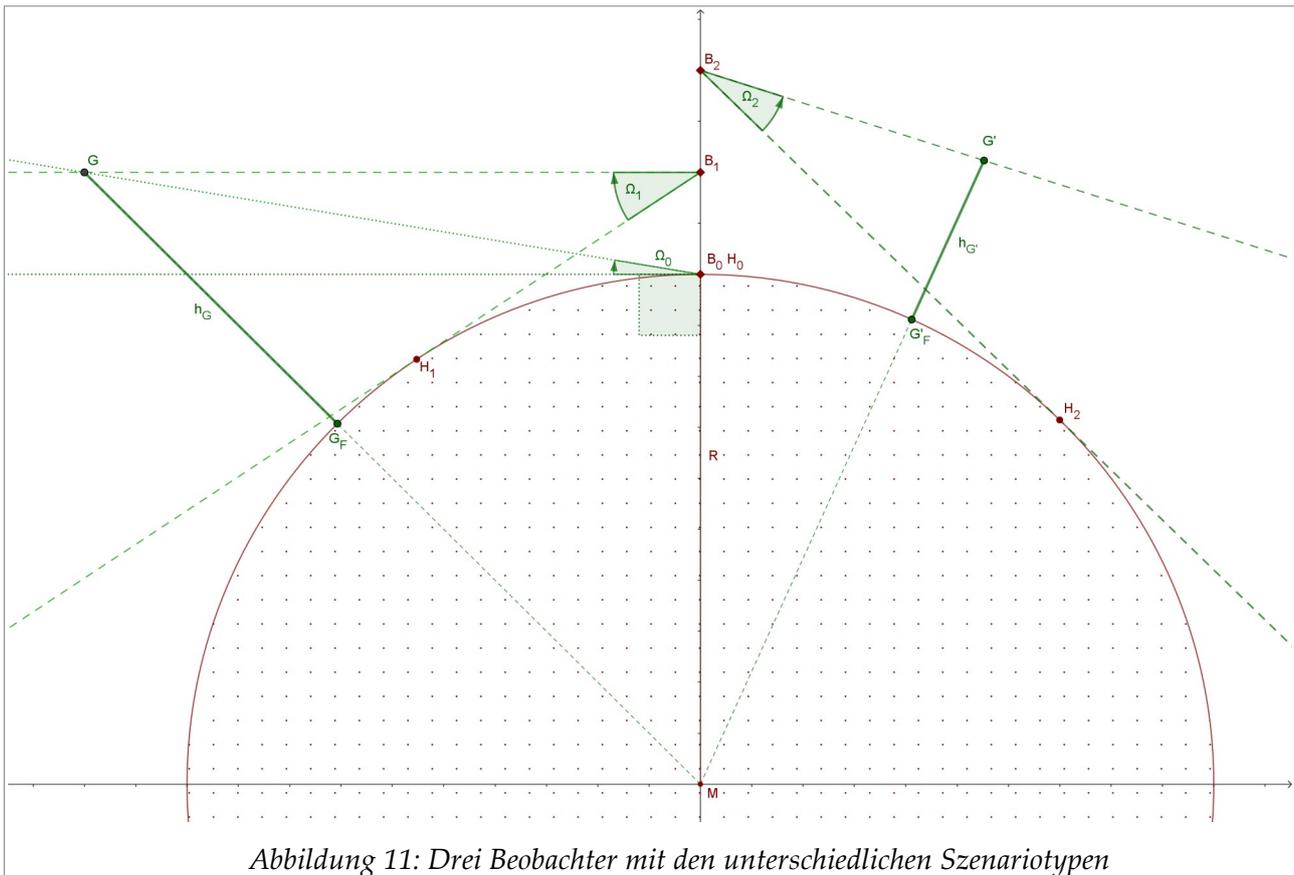


Abbildung 10:
Die direkte Entfernung des Horizontpunktes für einen Beobachter der Höhe h_B
Höhe in Meter, Entfernung in Kilometer

Das Fazit: Schon in Höhen von einigen Metern hat der Beobachter einen Weitblick von etlichen Kilometern gewonnen - zumindest in diesem mathematischen Modell, wo der Blick nicht durch allerlei geografisches Beiwerk wie Hügelketten oder aufragende Bäume verstellt wird.

3.2 Der Höhenwinkel



Der Beobachter B_0 guckt sich auf dem Bauch liegend ($h_0 = 0$ m) einen Berggipfel G an, sein Horizont befindet sich unmittelbar unter ihm oder mathematisch ausgedrückt, die Punkte B_0 und H_0 fallen zusammen. Dieser Beobachter sieht nur den kleinen oberen Teil des Berges, der über seinem Horizont liegt, und diesen unter dem Höhenwinkel Ω_0 .

Dieser Höhenwinkel Ω_0 wird bestimmt durch den Sektor, der aus der Tangente am Kreis im Punkt H_0 und der Halbgeraden vom Beobachterpunkt B_0 zum Gipfelpunkt G gebildet wird.

Der Beobachter B_1 guckt sich einen Berggipfel G von einem erhöhten Standort aus an ($h_1 > 0$ m). Sein Horizont H_1 liegt zwischen dem Fußpunkt des Berges G_F (auf der Höhe 0 m NHN gelegen) und seinem Standort B_0 (auf der Höhe h_1 m NHN gelegen). Nur ein kleiner unterer Teil des Berges und der Fußpunkt G_F des Berges selbst liegt für den erhöhten Beobachter der Erdkrümmung wegen unsichtbar hinter dem Horizont, abgesehen von physikalischen Besonderheiten, die unter Umständen einen Blick hinter den Horizont erlauben.

Der Höhenwinkel Ω_1 wird bestimmt durch den Sektor, der aus dem Horizontpunkt H_1 , dem Gipfelpunkt G und dem Beobachterpunkt B_1 als Scheitelpunkt des Sektors gebildet wird.

Der Beobachter B_2 guckt sich nun einen Berggipfel G' von einem noch weiter erhöhten Standort aus an. Sein Horizont H_2 liegt jetzt hinter dem Fußpunkt des Berges; genauer liegt der Gipfelfußpunkt G_F zwischen dem Horizontpunkt H_2 und dem Fußpunkt H_0 .

Der untere Teil des Berges und der Fußpunkt G'_F des Berges selbst liegen für den Beobachter B_2 vor seinem Horizont, sodass man meinen könnte, der Betrachtungswinkel des Beobachters müsste durch den Fuß- und den Gipfelpunkt des Berges bestimmt sein.

Wenn allerdings von einem Alpenpanorama gesprochen wird, haben wir es mit einem Wanderer zu tun, der in *weiter* Entfernung von der Alpenkette von einem Aussichtspunkt aus die Berge betrachtet, wie sie sich am *hellen* Himmel abzeichnen. Jene unteren Teile der Berge, die unterhalb des Horizontes verortet sind, wird das Auge des Betrachters selten auflösen können, sie verschwimmen in einem dunstigen, grauen Einerlei.

Der Höhenwinkel Ω_2 wird also auch hier bestimmt durch den Sektor, der aus dem Horizontpunkt H_2 , dem Gipfelpunkt G' und dem Beobachterpunkt B_2 als Scheitelpunkt des Sektors gebildet wird.

3.3 Die UTM-Koordinaten

Die Orte geografischer Punkte im dreidimensionalen Raum werden durch ein Zahlentripel beschrieben; zum einen gehört dazu ein Wertepaar, nämlich die geografischen Koordinaten Länge und Breite als Winkelmaße bezogen auf ein gewähltes Ellipsoid, zum anderen die Höhe als Längenmaß bezogen auf ein gewähltes Höhensystem. Das Höhensystem legt die Referenzpunkte (beziehungsweise die Referenzflächen) fest, denen die Höhe 0 m zugewiesen wird.

In Deutschland wird das Referenzellipsoid aus dem Geodäsie-Referenzsystem GRS80⁷ für die Angabe von Länge und Breite verwendet und dazu das Höhensystem NHN⁸ für die Angabe von Höhen 'über dem Meeresspiegel' als gewählte Referenzfläche.

Niemand, der von A nach B auf diesem Planeten unterwegs ist, möchte gerne einen Globus in der Hand halten, um seinen Kurs zu bestimmen, dazu braucht es Landkarten, in elektronischer oder auch in Papierform, was bedeutet, dass die gute alte Erde Stück für Stück eingeebnet werden muss. Seit einiger Zeit leisten diese Einebnung die UTM-Projektionen.

Ich verwende hier UTM-Koordinaten für die Abstands- und Winkelberechnung, möchte mich zu diesem komplexen Thema der Einebnung aber kurz fassen, es ist quasi ein Fass ohne Boden. Am Ende der Mühen der Einebnung erhält man jedenfalls ein zweidimensionales Koordinatensystem aus parallelen und senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenlinien, in dem man über nicht zu ausgedehnte Bereiche Geometrie betreiben kann, soll hier heißen: Abstände und Winkel messen kann⁹.

Nebenbei: Als ich mit diesem Problem begann, hatte ich gerade ein schönes UTM-Papier als Lesefutter vor den Augen. Heute hätte ich geschaut, ob mir nicht ein Python-Modul den direkten Weg der Berechnung des Abstandes und des Azimutalwinkels geöffnet hätte, also ohne den Umweg über die UTM-Koordinaten zu nehmen.

(7) Geodätisches Referenzsystem 1980 aus dem Europäischen Terrestrischen Referenz System 1989 (ETRS89)

(8) NormalHöhenNull

(9) Die UTM-Algorithmen, die ich verwende, stammen nach alter Gewohnheit noch aus meinen alten Tagen als physikbewandelter Softwerker.

3.4 Der Abstand und der Richtungswinkel

Neben der Winkelhöhe über dem Horizont benötigt ein Beobachter vor allem einen Richtungswinkel, meist Azimut genannt, für die Himmelsrichtung, in der er den Berg mit seinem Gipfel am Horizont erwarten darf.

In der nächsten Abbildung 12 sieht der Leser ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem, dessen Achsen senkrecht aufeinander stehen; die y-Achse für den UTM¹⁰-Hochwert zeigt nach 'UTM-Gitter Nord', also mehr oder weniger hoch in die geografisch nördliche Richtung, die x-Achse zeigt bezogen auf 'Gitter Nord' senkrecht nach rechts, also mehr oder weniger in die geografisch östliche Richtung.

Eingezeichnet in das Koordinatensystem sind des Weiteren die UTM-Koordinaten die Fußpunkte des Beobachters und eines Gipfels. Der Fußpunkt P_F eines Punktes P auf oder über der Erde ist derjenige Punkt auf der Falllinie des Punktes P im Schwerfeld der Erde, dem die Höhe 0 m zugeordnet ist.

Und nun geht es ab in die UTM-Koordinatenebene! Ich verbinde den UTM-Punkt B_F mit dem Punkt G_F durch eine gerichtete Strecke, durch einen Vektor mit der Länge a_G . In der Abbildung 12 wird der Vektorcharakter angedeutet durch eine mittige Richtungspfeilspitze. Die Richtung α_G des Vektors in der UTM-Koordinatenebene wird mit Werten über den Vollkreis auf die positive x-Achse bezogen und gegen den Uhrzeiger gemessen. Die Länge a_G dieses Vektors zwischen dem Beobachter und dem beobachteten Berg geht ein in die hier verwendeten Algorithmen zur Berechnung des Azimuts und der Elevation eines Gipfels.

Die lokal isometrischen UTM-Koordinaten Rechtswert und Hochwert bringen es mit sich, dass in der UTM-Koordinatenebene lokal Geometrie betrieben werden kann.

Die Länge a_G der Strecke berechnet sich aus den Differenzen der x- und y-UTM-Koordinaten der Fußpunkte mittels des alten Pythagoras' aus der Schulzeit.

$$a_{Gx} = x_{G_F} - x_{B_F}$$

$$a_{Gy} = y_{G_F} - y_{B_F}$$

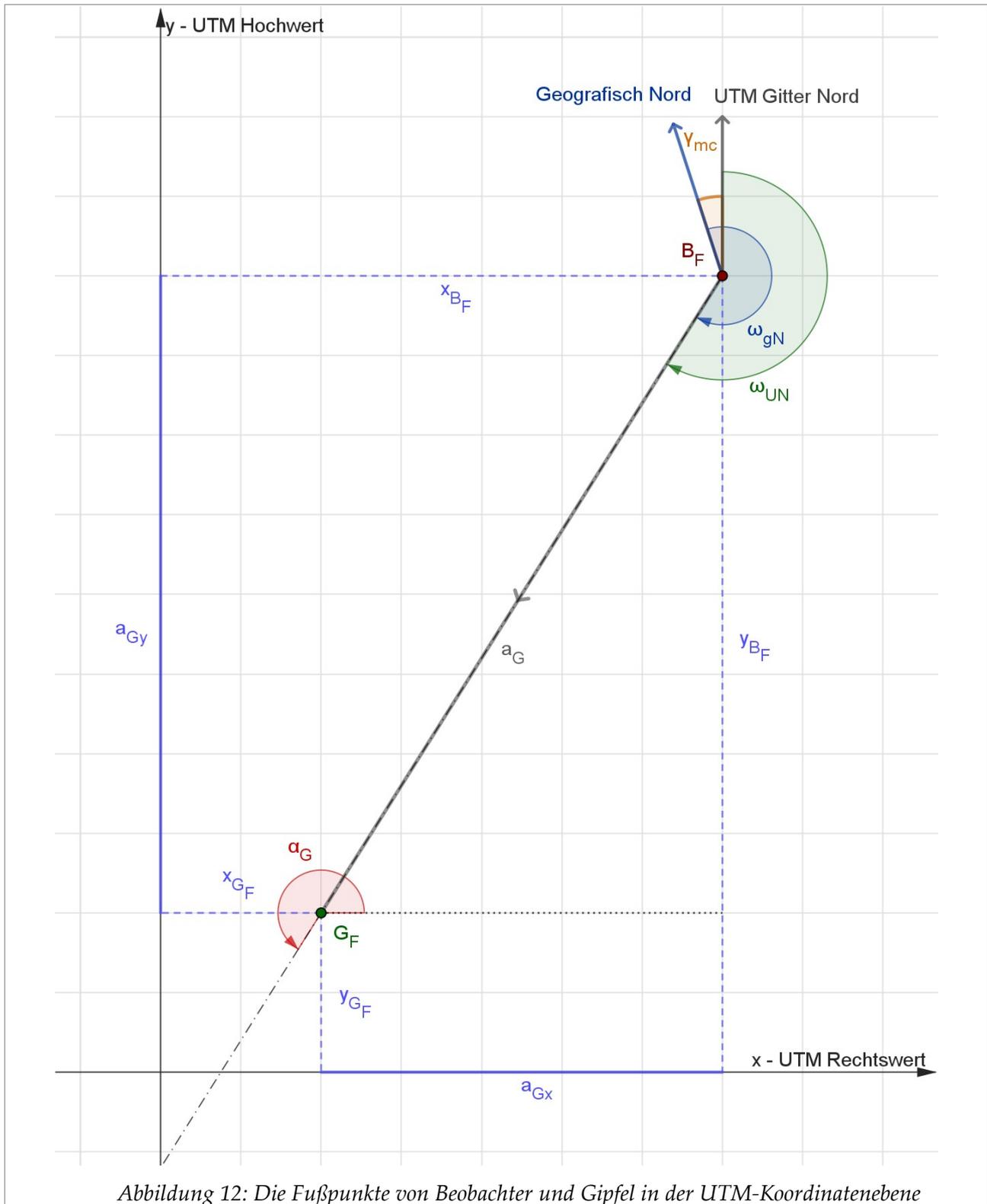
Fußpunktabstand des Beobachters vom Gipfel

$$a_G = \sqrt{a_{Gx}^2 + a_{Gy}^2}$$

Die UTM-Abbildung vom Ellipsoiden in die Ebene ist nicht längentreu. Der gerade berechnete Abstand a_G wird allerdings vorwiegend für die Berechnung zweier Winkel, dem Richtungswinkel und dem Höhenwinkel, benötigt und dabei halten sich die Genauigkeitsansprüche unsererseits in Grenzen. Auf weitere Längenkorrekturen kann ich daher verzichten.¹¹

(10) Universal Transverse Mercator

(11) Im Anhang ab Seite 31 lässt sich Weiteres dazu finden.



Und nun zu der wichtigsten zu bestimmenden Größe, dem Richtungswinkel. In der obigen Abbildung 12 ist dies letztlich der dort eingezeichnete Winkel ω_{gN} , der für den Beobachter die Richtung des Gipfels gegen 'geografisch Nord'¹² angibt; er beginnt im Norden mit 0° und wächst im Uhrzeigersinn bis gegen 360° (2π).

Die Winkelfunktion Arcustangens *atans2* in der zweistelligen Variante ist eine Umkehrfunktion des Tangens.

(12) Wenn gewünscht, wird auch der Richtungswinkel gegen 'magnetisch Nord' berechnet.

<p>$atan2$ gibt für die beiden kartesischen Koordinaten (a_x, a_y) eines Vektors \vec{a} den Winkel gegen die positive x-Achse in dem Intervall $(-\pi, +\pi]$ zurück. Aus diesem Winkel ergibt sich aus dem Ausgangswinkel α_G mit Zwischenschritten der gewünschte Richtungswinkel ω_{gN}.</p>	$\alpha = atan2(a_y, a_x) \quad -\pi < \alpha \leq \pi$ $0 = atan2(0, a_x) \quad \text{für } a_x \geq 0$ $\pi = atan2(0, a_x) \quad \text{für } a_x < 0$
<p>1. α_G: Der in der obigen Abbildung 12 eingezeichnete Winkel α_G nimmt nur positive Werte an, beginnt auf der positiven x-Achse und wächst gegen den Uhrzeigersinn bis zu dem Wert 2π.</p>	$0 \leq \alpha_G < 2\pi$ $\alpha_G = \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha \geq 0 \\ \alpha + 2\pi & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$
<p>2. ω_{UN}: Der Winkel ω_{UN} bezieht sich auf die Richtung 'UTM Gitter Nord' und wächst im Uhrzeigersinn gegen den Wert 2π.</p>	$\omega_{UN} = (2\pi - \alpha_G) + \frac{1}{2}\pi$

In der Praxis wird man einen Richtungswinkel benötigen, der gegen 'geografisch Nord' oder auch - für die Arbeit mit dem Kompass - gegen 'magnetisch Nord' definiert ist.

Für den Schritt von 'UTM Gitter Nord' hin zu 'geografisch Nord' benötigt man die Meridiankonvergenz $\gamma_{mc}(p)$; sie ist abhängig vom Beobachterstandort und gibt in jedem Punkt p den Winkel an zwischen dem Meridian, der durch den Punkt p hin zum geografischen Nordpol verläuft, und der vertikalen UTM-Koordinatenlinie, die nach 'UTM Gitter Nord' zeigt.

<p>3a. ω_{gN}: Der Winkel ω_{gN} bezieht sich auf die Richtung 'geografisch Nord' in Richtung Nordpol und wächst im Uhrzeigersinn gegen den Wert 2π.</p>	$\omega_{gN} = \omega_{UN} + \gamma_{mc}$
---	---

Will man zur Richtungsbestimmung einen Kompass verwenden, braucht man einen Richtungswinkel, der sich auf die Richtung 'magnetisch Nord' bezieht.¹³ Während die Meridiankonvergenz als eine Teilfunktion der UTM-Projektion per Algorithmus für jeden Punkt berechnet werden kann, muss die ebenfalls standortabhängige Ortsmissweisung γ_{kom} , auch magnetische Deklination genannt, aus dem ausgemessenen und zeitlich veränderlichen Magnetfeld¹⁴ der Erde abgeleitet werden.

<p>3b. ω_{mN}: Der Winkel ω_{mN} bezieht sich auf die Richtung 'magnetisch Nord'¹⁵ und wächst im Uhrzeigersinn gegen den Wert 2π.</p>	$\omega_{mN} = \omega_{gN} + \gamma_{kom}$
---	--

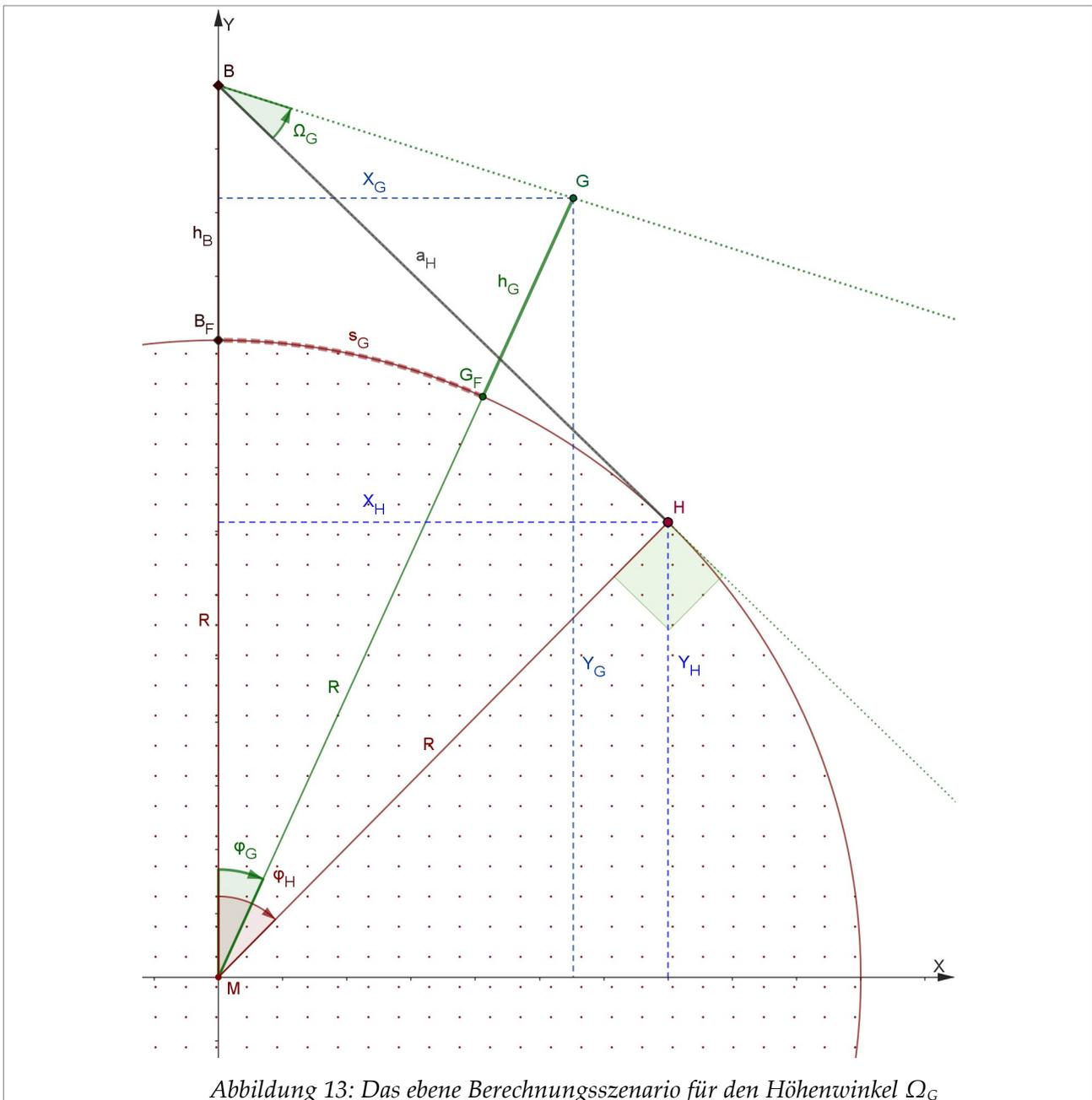
(13) Meine Erfahrungen mit einem einfachen Handkompass sind nicht besonders erfreulich.

(14) Siehe den 'GRF Declination Calculator' unter 'Verweise und Literatur' auf der Seite 40.

(15) Mit dieser Formulierung ist *nicht* die Richtung hin zu einem magnetischer Nordpol gemeint; 'magnetisch Nord' wird durch die Richtung des Magnetfeldes am Beobachterstandort bestimmt.

3.5 Die Berechnung des Höhenwinkels

Die Geometrie wird einfacher und damit auch die Rechnerei, wenn man es mit einer Kugeloberfläche beziehungsweise in 2 Dimensionen mit Kreisen statt mit Ellipsen zu tun hat. Ich approximiere deshalb die ellipsoidische Fläche am Fußpunkt B_F (siehe Abbildung 13) des Beobachters bestmöglich durch eine Kugeloberfläche mit dem Gaußschen Krümmungsradius am Fußpunkt. Dieser Krümmungsradius ist das geometrische Mittel aus dem kleinsten und dem größten Krümmungsradius, den beiden Hauptkrümmungsradien.



In der Ebene, die durch die 3 Punkte M, B und G bestimmt ist, wird ein kartesisches Koordinatensystem so gelegt, dass der Beobachterpunkt auf der positiven y-Achse zu liegen kommt.

Der Abstand per Luftlinie a_H des Beobachterpunktes¹⁶ B zum Horizontpunkt H wurde bereits oben im Unterkapitel 3.1 abgeleitet und ist nur durch die Höhe h_B des Beobachters bestimmt. Das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete in dem rechtwinkligen Dreieck aus den 3 Punkte M , B und H legt dann den Winkel φ_H fest, mit dessen Hilfe sich die Koordinaten des Horizontpunktes H leicht berechnen lassen.

$$B = (0, R+h_B)$$

$$a_H = \sqrt{2R \cdot h_B + h_B^2}$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{a_H}{R}\right)$$

$$H = (X_H, Y_H)$$

$$X_H = R \cdot \sin(\varphi_H)$$

$$Y_H = R \cdot \cos(\varphi_H)$$

Der Abstand s_G des Beobachterfußpunktes B_F zum Gipfelfußpunkt G_F entlang der gekrümmten Erde wurde bereits oben im Unterkapitel Fehler: Verweis nicht gefunden über deren UTM-Koordinaten abgeleitet (dort a_G genannt), ist also an dieser Stelle bereits bekannt.

Der dem Kreisbogen s_G zugeordnete Kreisinnenwinkel φ_G ist damit ebenfalls kein Rätsel mehr. Nun lassen sich ohne weiteres die kartesischen Koordinaten des Gipfelpunktes mit dessen Höhe h_G in einer zweidimensionalen Ebene berechnen.

$$\varphi_G = s_G / R$$

$$G = (X_G, Y_G)$$

$$X_G = (R+h_G) \cdot \sin(\varphi_G)$$

$$Y_G = (R+h_G) \cdot \cos(\varphi_G)$$

Die 3 Punkte H , B und G in der Berechnungsebene legen nun einen Sektor fest mit dem Beobachterpunkt B als Scheitelpunkt des Sektors. Der Öffnungswinkel Ω_G dieses Sektors ist der relevante Winkel für unser Alpenpanorama, er wird mit geometrischen Hilfsmitteln berechnet.

In der folgenden Zeile werden jeweils 2 Punkte, nämlich B und G sowie B und H , durch einen Vektor verbunden, das Dach über einen Vektor charakterisiert den Einheitsvektor.

$$\vec{v}_G = G - B \quad \hat{v}_G = \frac{\vec{v}_G}{|\vec{v}_G|}$$

$$\vec{v}_H = H - B \quad \hat{v}_H = \frac{\vec{v}_H}{|\vec{v}_H|}$$

Die zweistellige inverse Tangensfunktion (*arctan2* oder *atan2* genannt) liefert dann mit Hilfe des Skalar- und des Kreuzproduktes für zweidimensionale Vektoren den gesuchten Beobachtungswinkel¹⁷ über dem Horizont.

$$dy_\Omega = \sin(\Omega_G) = \hat{v}_H \times \hat{v}_G$$

$$dx_\Omega = \cos(\Omega_G) = \hat{v}_H \cdot \hat{v}_G$$

$$\Omega_G = \text{atan2}(dy_\Omega, dx_\Omega)$$

(16) In den mathematischen Formeln charakterisiere ich Punkte explizit durch ein vorgestelltes P in der Art P_B .

(17) Zur Berechnung verwende ich ein von mir geschriebenes Python-Modul zur 2-dimensionalen Geometrie.

4 Anwendungen

4.1 Die Vorgehensweise bei der Auswertung von Fotos

Das Ziel ist es, die berechneten azimutalen Winkel 'möglichst einfach' auf ein Foto des Alpenpanoramas zu übertragen, konkret heißt das, dass den berechneten Winkelwerten in Bogengrad Pixelwerte des Bildes in natürlichen Zahlen zugeordnet werden, und dieses, ohne die Abbildungseigenschaften des verwendeten Kameraobjektivs zu kennen.

Dieses Verfahren muss im ersten Schritt kalibriert werden. Sind 2 Gipfel auf dem Foto bekannt, eventuell auch nur hypothetisch bekannt, so lassen sich auch deren Pixelwerte mit einem Bildbetrachter¹⁸ ermitteln. Die Hoffnung wäre dann, dass eine lineare Interpolation, die die Winkeldaten mit den Pixeldaten verknüpft, zügig zu weiteren Gipfelzuordnungen führt.

Über kleine azimutale Winkelbereiche sollte dieses Verfahren auf jeden Fall funktionieren, gegebenenfalls müsste man das Verfahren mit den gewonnenen Gipfelwerten rekali-brieren, die lineare Abbildung also schrittweise neu justieren.

Zu meiner großen Freude hat sich bei den von mir ausgewerteten Fotos gezeigt, dass eine wiederholte Rekalibrierung nicht nötig wurde, was auch daran gelegen haben mag, dass ich auf Fotos im naheliegenden Weitwinkelformat verzichtet habe. Um ein Bild aus der analogen Fotowelt zu gebrauchen: ich habe die Fotos quasi mit einem 50 mm-Normalobjektiv aufgenommen, bei dem die Abbildungsverzerrungen nur wenige waren. Zudem dürfte es hilfreich sein, die Kamera möglichst horizontal auf den Horizont auszurichten, die Kamera also nicht verdreht oder gekippt zu halten, um perspektivische Verzerrungen zu vermeiden.

Um die Berechnung der Pixelwerte p_i aus den Azimuten a_i per linearer Interpolation mithilfe der Geradengleichung $p_i(a_i)=A \cdot a_i+B$ nicht mit der Hand vornehmen zu müssen, habe ich die für einen Standort berechneten Gipfelwerte (im Wesentlichen also: Azimute und Elevationen) in eine ‚LibreOffice Calc‘¹⁹-Datei importiert. Aus 2 bekannten Paaren (a_1, p_1) und (a_2, p_2) lassen sich die Konstanten A und B der Geradengleichung berechnen. Die Berechnung von A und B sowie die Geradengleichung $p_i(a_i)$ selbst habe ich in 3 Calc-Makros ausgelagert²⁰.

(18) Ich benutze seit Jahrzehnten den bewährten IrfanView.

(19) Ein weit verbreiteter Excel-Klon

(20) Siehe dazu Anhang A

4.2 Das Alpenpanorama am Dampfersteg in Starnberg

Und nun zu den Objekten meiner Begierde. Hier das erste.

Auf einer Radlfahrt nach Starnberg am Freitag, den 19. Oktober 2018, habe ich die 3 Fotografien 15:26 Uhr aufgenommen, um das Panorama mit seinen Berggipfeln beschriften zu können. Das Wetter war immerhin halbwegs gnädig.

Nach mehreren Anläufen und Abbrüchen bin ich endlich im Jahre 2024 zu einem halbwegs akzeptablen Ende meines Projektes gekommen.

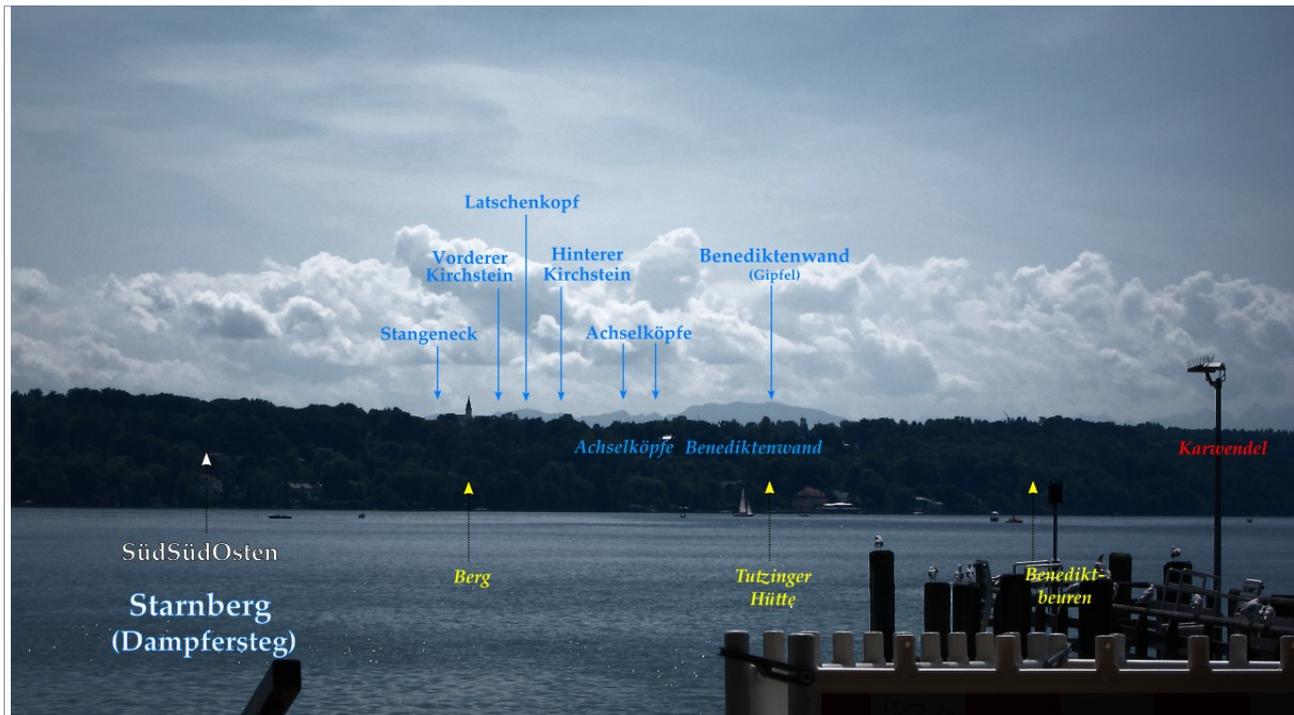


Abbildung 14: Alpenpanorama 1 nach SüdSüdOsten am Dampfersteg in Starnberg

Unsereins und Kind und Kegel stand am Dampfersteg und betrachtete die kaum übers Grün ragende Gipfelkette: Stangeneck, Kirchstein, Latschenkopf, Achselköpfe, Benediktenwand - wie die Panoramatafel am Dampfersteg aufklärte - und am Ende die Tutzinger Hütte mit dem A-Lager.

Das war der Weg, den wir vom Herzogstand aus vor einigen Tagen gelaufen sind!!!²¹. Da leuchteten die Kinderaugen. Und dann war die Panoramatafel auf einmal weg. Hier ist mein unhölzener Ersatz.

(21) https://www.ragutt.de/be_bergwandern/lenggries_kochel/index.html

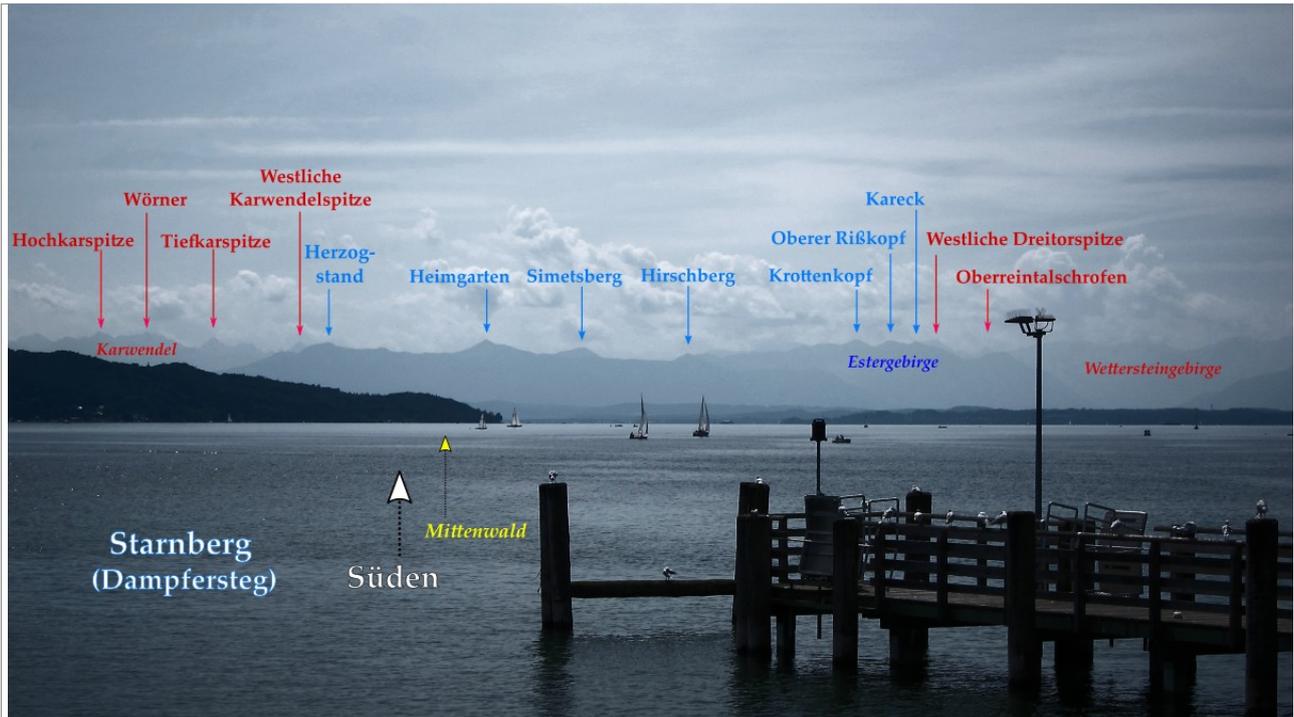


Abbildung 15: Alpenpanorama 2 nach Süden am Dampfersteg in Starnberg

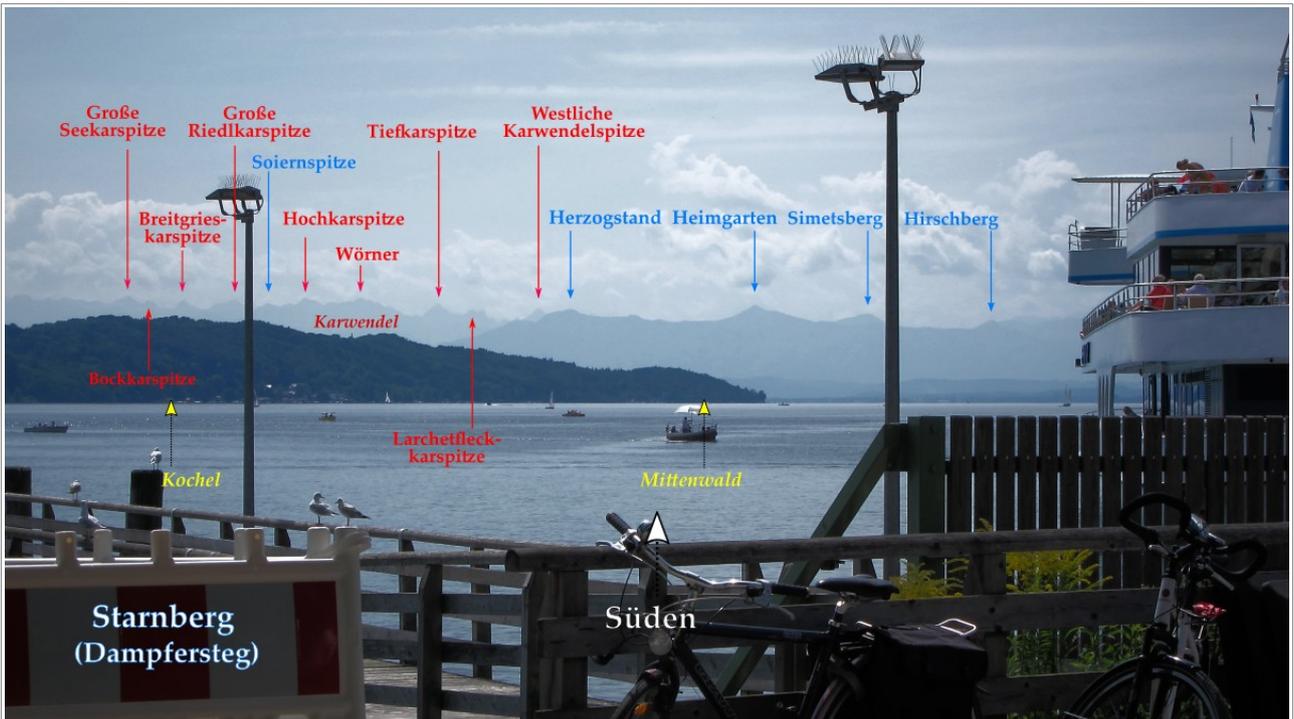


Abbildung 16: Alpenpanorama 3 nach Süden am Dampfersteg in Starnberg

In der nächsten Abbildung 17 habe ich als Bild diejenige Calc-Datei eingefügt, auf die meine Auswertung des Fotos von Abbildung 16 basiert.

Die Makros für die lineare Interpolation werden mit den beiden gelb hinterlegten Gipfeln *Heimgarten* und *Hirschberg* kalibriert, also mit deren Wertepaaren aus Azimut und den aus dem Foto ausgelesene horizontalen xPixel-Werten²²; in der Spalte xbPixel (‚b‘ steht für berechnet) sind die mit Hilfe der Makros interpolierten horizontalen xPixel-Werte für all meine verwendeten Gipfel im Fotobereich aufgelistet.

Die rötlich hinterlegten *Gipfel* habe ich hinreichend plausibel identifiziert und im Foto markiert. Meine Wahl von Heimgarten und Hirschberg als Referenzgipfel, die mehr am Rand des fotografierten Szenarios liegen, war schlicht notgedrungen: der breite, wenig gipfelige Herzogstand war mir nicht spitz genug für eine genaue Positionierung des Gipfels. Eine Wahl von Referenzgipfeln, die mittiger im Foto lägen, wäre dem einfachen Interpolationsverfahren dienlich, da bildmittig die Abbildungsverzerrungen am geringsten ausfallen sollten.

(22) Vertikale ‚yPixel‘-Werte habe ich bisher nicht bei der Auswertung benutzt.

IMG_5712_ji.png							
Starnberg (Wümmsee, Dampfersteg)							
Gipfel / Ort / Hütte	Azimuth	Elevation	Entf.	xPixel	yPixel	yhPixel	xbPixel
ödkarspitze westliche.....:	174,90	2,35	65,20				
Steinkarspitze.....:	174,97	1,86	60,40				
Vogelkarspitze.....:	175,18	2,31	61,20				33
Schlichtenkarspitze Hintere.:	175,68	2,27	61,10				127
Marxenkarspitze.....:	175,91	2,28	65,40				170
Bayerkarspitze.....:	176,61	1,91	54,90				302
Bäralpkopf.....:	176,67	2,13	61,10				314
Seekarspitze Kleine.....:	176,80	2,26	65,40				338
Seekarspitze Große.....:	176,87	2,30	65,80				351
Jochberg.....:	176,98	1,96	41,20				372
Dreierspitz.....:	177,03	1,95	55,50				382
Bockkarspitze.....:	177,16	2,12	64,70				406
Kochel am See.....:	177,41	...	37,50				453
Breitgrieskarspitze.....:	177,70	2,24	65,40				508
Krapfenkarspitze.....:	178,00	2,09	55,80				564
Riedlkarspitze Große.....:	178,46	2,25	65,00				651
Raffelspitze.....:	178,47	2,12	61,20				653
Soiernspitze.....:	178,94	2,19	57,20				742
Riedlkarspitze Kleine.....:	179,20	1,96	64,50				791
Larchetkarspitze.....:	179,29	2,21	65,10				808
Hochkarspitze.....:	179,50	2,29	60,90				847
Soiernhaus.....:	179,58	...	55,80				862
Reißende Lahnspez.....:	179,89	2,14	57,30				921
Soiernschneid.....:	180,08	2,11	57,10				957
Pleisenspitze.....:	180,12	2,22	65,30				964
wörner.....:	180,37	2,29	60,70				1011
Großkarspitze.....:	180,59	2,23	61,00				1053
Schönberg.....:	180,90	2,08	61,90				1111
Schöttelekarspitze.....:	181,04	2,03	55,80				1138
Tiefkarspitze.....:	181,53	2,20	62,00				1230
Larchetfleckspitze.....:	181,78	2,05	62,70				1277
Seinskopf.....:	181,97	1,93	56,00				1313
Larchetfleckspitze.....:	182,06	2,12	62,80				1330
Signalkopf.....:	182,37	1,86	56,30				1388
Dammkarhütte.....:	182,39	...	62,10				1392
Kirchle.....:	182,56	1,97	62,90				1424
Lausberg.....:	182,56	1,81	56,60				1424
Fahrenbergkopf.....:	182,83	1,96	43,30				1475
Kreuzwand.....:	182,90	1,92	62,20				1488
Karwendelköpfe.....:	182,98	2,12	62,60				1503
Karwendelspitze westliche...:	183,05	2,13	63,00				1516
Viererspitze.....:	183,34	1,85	62,10				1571
Kirchlspez.....:	183,37	2,01	64,60				1577
Sulzleklammspez.....:	183,42	2,04	64,30				1586
Herzogstand (Pavillon).....:	183,49	2,13	42,60				1599
Linderspez.....:	183,52	2,11	63,30				1605
Martinskopf.....:	183,55	2,03	43,10				1611
Gerberkreuz.....:	183,94	2,05	63,40				1684
Schlehdorfer Kreuz.....:	184,42	2,05	42,40				1775
Mittenwald.....:	185,53	...	61,60				1984
Heimgarten.....:	186,31	2,20	42,80	2131			2131
Arnspez Große.....:	187,81	1,85	67,10				2414
Simetsberg.....:	187,97	2,05	48,10				2444
Kranzberg Hoher.....:	188,11	1,26	61,10				2470
Arnplattenspez.....:	188,58	1,81	67,70				2559
Schrankogel.....:	189,66	1,85	107,30				2763
wettersteinspez Untere.....:	189,77	1,89	64,00				2783
Hirschberg.....:	189,88	1,96	44,50	2804			2804
wettersteinspez Obere.....:	190,29	2,01	64,20				2881
Rotplattenspez.....:	191,21	2,09	64,80				3055

Abbildung 17: Auswertung für das Alpenpanorama 3 Starnberg

4.3 Das Alpenpanorama vom Steinberg aus

Und nun zu dem zweiten Objekt meiner Begierde. Das anständige Foto hat dankenswerterweise die fotostarke Tochter zur Verfügung gestellt; auf meinen Wanderungen hatte ich nie Wetterglück, mit Panorama war nichts. Wie anfänglich erläutert, gibt es vor Ort zwar eine Panorametafel, allerdings eine mit Schwächen, die mir wenig brauchbar schien. Der Künstler möge mir verzeihen.

Dem niedlichen kleinen hellgrauen Buckel eines offensichtlichen Gipfels aus der zweiten Gipfelreihe gleich links (also östlich) neben der Oberen Wettersteinspitze und ganz links in der Abbildung 18 auf der nächsten Seite habe ich nicht zuordnen können – das könnte heißen, dass meine Gipfelliste wieder einmal um weitere Alpengipfel aus der zweiten Reihe erweitert werden müsste. Oder es kann natürlich sein, dass diese oder jene meiner Zuordnungen nicht korrekt ist – letzte Gewissheit ist gerade bei den kleineren Gipfeln nicht leicht zu haben.

In der Abbildung 19 auf der übernächsten Seite habe ich als Bild diejenige Calc-Datei eingefügt, auf die meine Auswertung des Fotos von Abbildung 18 basiert.

Die Makros für die lineare Interpolation werden mit den beiden gelb hinterlegten Gipfeln **Alpspitze** und **Zugspitze** kalibriert. Die rötlich hinterlegten **Gipfel** habe ich hinreichend plausibel identifiziert und im Foto markiert. Hat Spass gemacht die Gipfelfindung! Übrigens: Die Gipfeldata habe ich in größeren Teilen vorwiegend aus amtlichen Kartenwerken zusammengeklickt. Ich hoffe, ich habe genau genug geklickt!

Daher wollte ich die Gipfeldata eigentlich noch einmal überarbeiten und hatte das angesammelte umfangreiche Wikipedia-Wissen als Datenbasis im Auge. Aber das Geschäft war mühsam, mühsame Handarbeit. Ich hatte schon oder erst ein Viertel meiner Daten auf einen sauberen Stand gebracht, als mir bei der Überprüfung der Gipfellaage ein Wikipedia-Gipfel unterkam, der doch nicht punktgenau da lag, wo er der Karte nach liegen sollte, nämlich auf dem Gipfel, er lag daneben, schon mehr auf dem Nachbargipfel. Da verlor ich die Lust auf eine saubere Gipfelliste und es blieb alles beim Alten.



Abbildung 18: Kleines Alpenpanorama Am Rinnerhof in Gilching Argelsried

Gipfel / Ort / Hütte	Azimuth	Elevation	Entf.	xPixel	yPixel	yhPixel	xbPixel
Geisenbrunn-Cora-AUSSCHNITT.jpg							
Gilching Argelsried: Am Rinnerhof 1							
wettersteinspitze obere.....	186,77	1,71	76,60				155
Hohe Kisten.....	187,21	1,74	61,60				183
Schrankogel.....	187,47	1,63	119,60				200
Rotplattenspitze.....	187,57	1,78	77,10				207
Krottenkopf.....	188,11	1,84	63,70				242
Schindlerskopf.....	188,26	1,74	62,50				252
wettersteinkopf.....	188,47	1,79	77,50				265
Rißkopf oberer.....	188,57	1,82	63,20				272
Kareck.....	188,96	1,81	63,40				297
Bischof.....	189,10	1,78	64,30				307
Musterstein.....	189,44	1,80	78,60				329
Törtelspitzen.....	189,68	1,77	78,80				344
Dreiterspitze Leutascher.....	190,12	1,91	80,30				373
Dreiterspitze westliche.....	190,28	1,89	79,60				384
Fricken Hoher.....	190,40	1,67	65,50				391
Scharnitzspitze.....	190,69	1,74	80,90				410
oberreintalschrofen.....	191,11	1,78	81,10				438
Hundsstallköpfe.....	191,65	1,78	81,20				473
Teufelsgrat.....	192,15	1,86	81,30				506
Hinterreintalschrofen.....	192,57	1,88	81,40				533
Garmisch-Partenkirchen.....	192,69	...	70,30				541
Hochwanner.....	193,64	1,92	81,80				603
Gaif Hoher.....	193,69	1,66	78,80				606
Ettaler Mandl.....	194,08	1,50	60,30				632
Alpspitze.....	194,67	1,92	78,30	670			670
Hochblassen.....	194,77	1,96	79,10				677
Laber.....	195,14	1,54	60,60				701
vollkarspitze.....	195,22	1,89	79,40				706
Knappenhäuser.....	195,31	...	77,20				712
Höllentalspitzen Äußere.....	195,54	1,95	79,60				727
Höllentalspitzen Mittlere.....	195,96	1,97	79,80				754
Höllentalangerhütte.....	196,08	...	77,90				762
Aufacker großer.....	196,18	1,47	57,60				769
Höllentalspitzen Innere.....	196,39	1,95	80,20				782
Kramerspitz.....	196,50	1,60	70,00				789
Schönangerspitze.....	196,87	1,67	77,70				814
Riffelköpfe.....	196,99	1,58	78,90				821
Riffelköpfe.....	197,08	1,72	79,20				827
Riffelspitzen.....	197,09	1,54	77,90				828
Riffelspitze Nördliche.....	197,11	1,64	78,20				829
Riffelspitze südliche.....	197,15	1,65	78,40				832
Notkarspitze.....	197,25	1,64	64,90				838
Riffel Hohe.....	197,41	1,62	78,80				849
Riffelspitze Große.....	197,58	1,89	79,60				860
Zugspitze.....	197,72	2,11	80,50	869			869
Oberammergau.....	197,85	...	60,10				877
Felderkopf vorderer.....	198,21	1,60	67,90				901
Schneefernerkopf.....	198,26	2,00	82,10				904
Rißberg.....	198,37	1,41	54,90				911
Hörnle Hinteres.....	198,68	1,52	55,40				932
Grünstein.....	199,18	1,70	89,60				964
Hörnle Mittleres.....	199,64	1,46	55,60				994
Hörnle vorderes.....	199,89	1,46	55,20				1011
Kieneckspitz.....	200,17	1,63	67,00				1029
Kienjoch.....	200,35	1,63	67,60				1041
Ehrwald.....	200,39	...	84,60				1043
Wannig.....	201,53	1,54	92,50				1118
Friederspitz.....	201,88	1,63	71,10				1140
Frieder.....	201,98	1,65	70,50				1147
Pürschlingshaus.....	202,23	...	63,30				1163
Teufelstättkopf.....	202,76	1,56	63,10				1198
Laubeneck.....	203,17	1,55	63,40				1225
Daniel.....	203,38	1,63	82,10				1238
Kuchelbergspitz.....	203,67	1,65	69,10				1257
Schellschlicht.....	203,98	1,60	73,20				1277
Hochschergen.....	204,17	1,31	58,50				1290
Hennenkopf.....	204,32	1,55	64,00				1300
Kuchelbergkopf.....	204,36	1,63	70,30				1302
Kreuzspitze.....	204,52	1,74	71,30				1313

Abbildung 19: Auswertung für das Alpenpanorama Gilching

Anhang

A. Die lineare Interpolation mit Makros

Den Azimuts der Gipfel, also den horizontalen Beobachtungswinkeln zu den Gipfeln bezogen auf die geografische Nordrichtung, sollen horizontale Pixelwerte eines Fotos per linearer Interpolation zugeordnet werden. Dies geschieht über eine Geradengleichung $p_i(a_i)$ mit 2 Konstanten A und B.

Dieses Vorgehen setzt allerdings voraus, dass 2 Gipfel auf dem Foto erkannt werden müssen, damit ihnen horizontale Pixelwerte zugeordnet werden können. Hat man nur 2 *vermutliche* Gipfelnamen an der Hand, muss überprüft werden, ob die Zuordnung weiterer berechneter Gipfel zu Gipfeln auf dem Bild ein ‚konsistentes‘ Panorama ergeben.²³

$$p(a_i) = A \cdot a_i + B$$

$$p_i \in \mathbb{R}; a_i \in \mathbb{R} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Die Konstanten A und B werden über 2 als bekannt vorausgesetzte Wertepaare (a_1, p_1) und (a_2, p_2) berechnet.

$$p(a_1) = p_1 = A \cdot a_1 + B$$

$$p(a_2) = p_2 = A \cdot a_2 + B$$

$$A = \frac{p_2 - p_1}{a_2 - a_1} \quad B = \frac{a_2 p_1 - a_1 p_2}{a_2 - a_1}$$

Diese 3 Makros verwende ich in LibreOffice Calc zur Berechnung der Konstanten A und B und zur wiederholten Berechnung der horizontalen Pixelwerte eines jeden relevanten Gipfelazimuts mithilfe der Geradengleichung $p(a_i)$ beziehungsweise dem Makro $INTPOL_P(Az_i, A, B)$.

```
Function INTPOL_A(a1,p1,a2,p2)
  INTPOL_A = (p2-p1)/(a2-a1)
End Function
```

```
Function INTPOL_B(a1,p1,a2,p2)
  INTPOL_B = (p2*a1-p1*a2)/(a1-a2)
End Function
```

```
Function INTPOL_P(Azi,A,B)
  INTPOL_P = A*Azi+B
End Function
```

(23) Hierbei können natürlich die Webseiten auf ‚alpen-panoramen.de‘ unterstützen.

B. Dies und das zum oblaten Ellipsoid²⁴

Das oblate Ellipsoid ist ein flach gedrücktes Ellipsoid mit den Hauptachsen $a > b$, das rotationssymmetrisch um eine Achse ist, hier nach freier Wahl um die z-Achse.

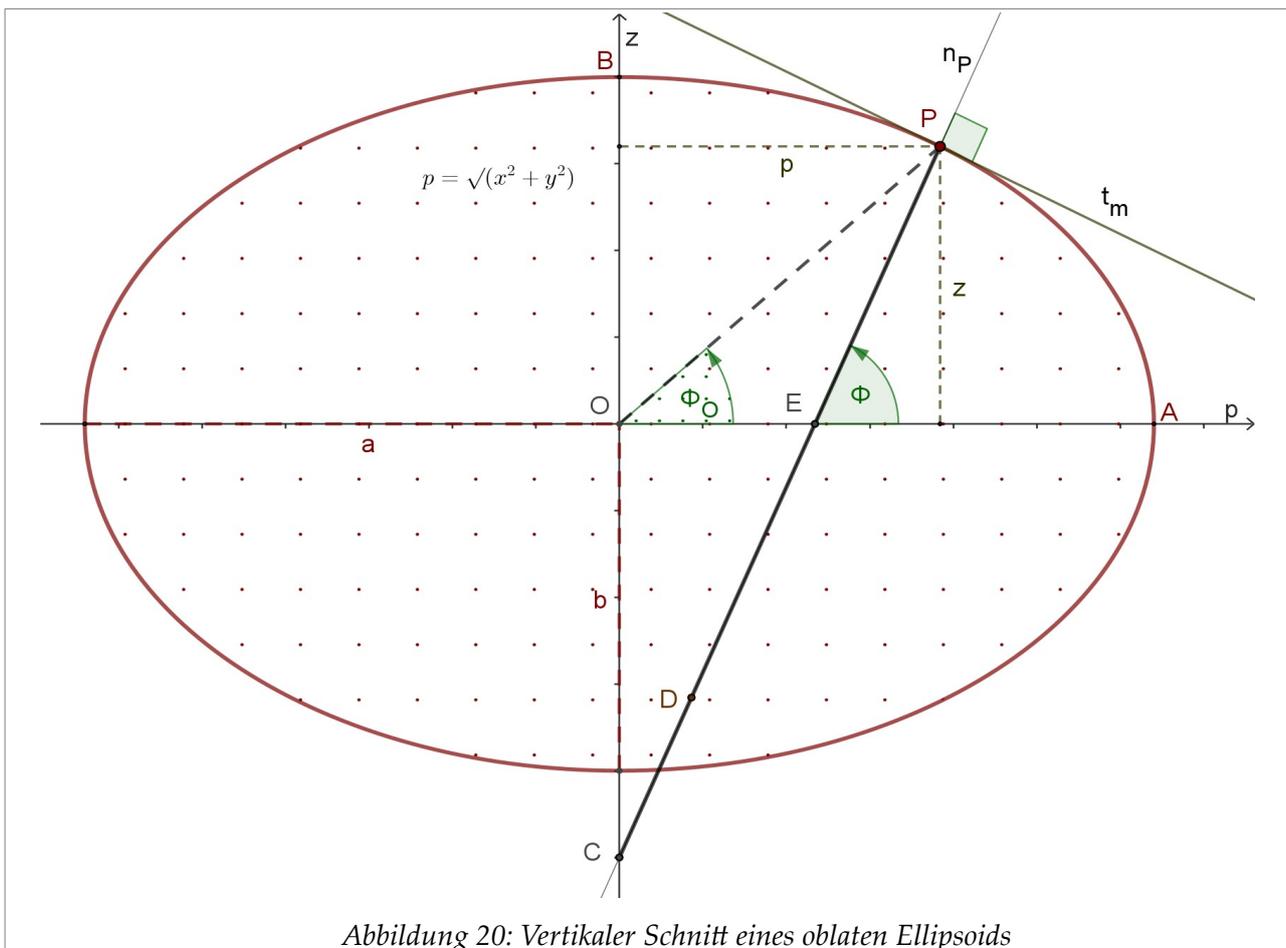
Die Gleichung dieses oblaten Ellipsoids in kartesischen Koordinaten ist:

$$1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2$$

$$|x|, |y| \leq a \quad |z| \leq b$$

Die geodätische Koordinaten eines Punktes P auf der Oberfläche des Ellipsoids sind die (geodätische) Breite²⁵ ϕ und die (geodätische) Länge λ ; die Länge λ ist der Drehung um die Symmetrieachse zugeordnet; die Breite ϕ ist durch die Lotrichtung im Punkt P definiert.

Die nächste Abbildung 20 zeigt eine Ellipse als Schnitt eines oblaten Ellipsoids, wobei die Schnittebene die Symmetrieachse (und somit auch den Punkt C) und den Punkt P (und somit auch die Normalengerade n_P durch P und C) enthält.



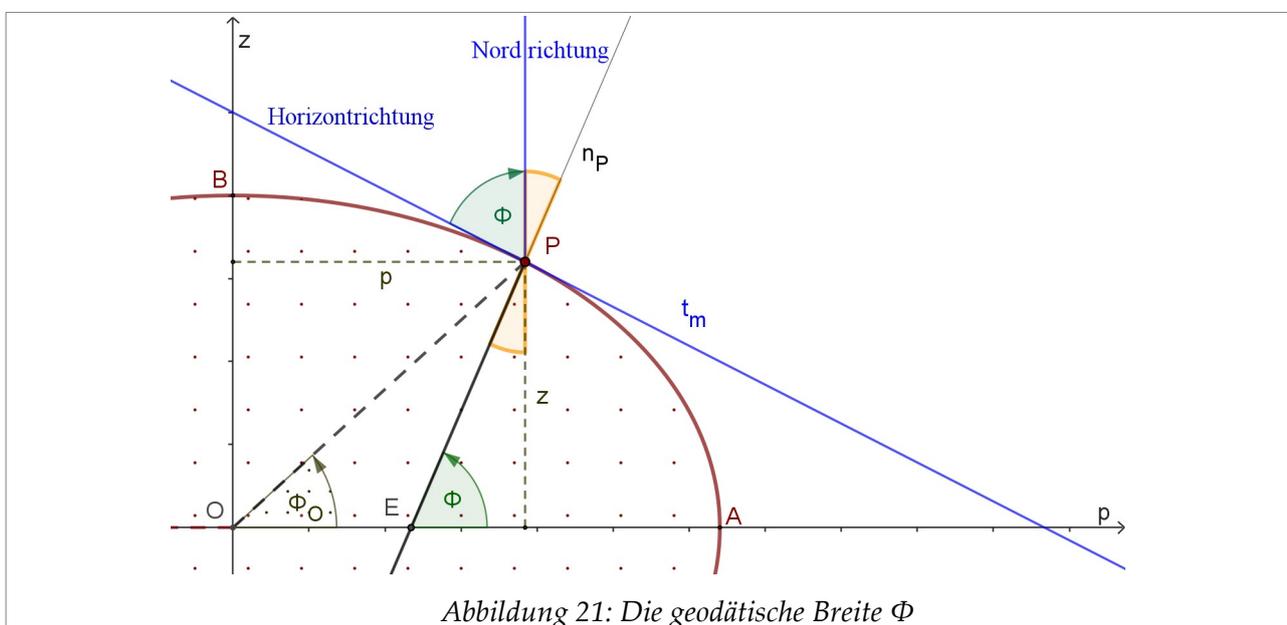
Das dreidimensionale Ellipsoid lässt sich aus dieser Schnittellipse durch eine Vollkreisrotation der Ellipse um die Symmetrieachse erzeugen.

(24) Ich lehne mich hier (nicht immer) in der Notation an das fulminante Papier von Peter Osborne (2013) an.

(25) Die geozentrische Breite ϕ_0 spielt in diesem Umfeld keine Rolle.

Die (erste numerische) Exzentrizität charakterisiert indirekt das Verhältnis der Halbachsen und tritt häufig in den Formeln auf:	$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$
Anschaulicher als die Exzentrizität charakterisiert die (Ellipsen-)Abplattung f , beziehungsweise das Inverse f^{-1} , wie weit ein Ellipsoid von der Kugelform abweicht:	$f = \frac{a-b}{a} \quad b = a \cdot (1-f)$
Das GRS80-Ellipsoid ist definiert durch die Daten:	$\begin{aligned} a &= 6378137,000 \\ b &= 6356752,314 \\ f &= 0,003352810703 \\ &= 1 : 298,257220143 \\ f^{-1} &= 298,257220143 \\ e &= 0,08181919131 \end{aligned}$

Wer die Erdgestalt als kugelförmig im Kopf hat, wird verwundert sein über die Definition der geodätischen Breite. Ein Blick in die nächste Grafik zeigt, dass diese Definition beileibe nicht weit hergeholt ist, denn ein Beobachter, der im Punkt P steht und den Polarstern kennt, kann mit seiner Handspanne leicht seinen Breitengrad abschätzen: Der Winkel ϕ zwischen seinem Horizont und der Nordrichtung ist genau diese Breite.



Der Krümmungskreis am Punkt P einer ebenen Kurve ist derjenige Kreis, der die Kurve in diesem Punkt bestmöglich approximiert; zugleich ist der Radius des Krümmungskreises – genauer das Inverse des Radius - auch ein Maß für die Krümmung der Kurve.

Das Ellipsoid ist eine zweidimensionale Fläche, bei der für jeden Punkt P und für jede Tangentenrichtung am Punkt P eine Krümmung und damit solch ein Radius definiert ist. Allerdings darf der Anwender sich auf die beiden Hauptkrümmungen mit den zu-

geordneten Radien beschränken, da sich aus diesen beiden alle anderen Krümmungen am Punkt P berechnen²⁶ lassen.

Die Tangentenrichtungen in einem Punkt des Ellipsoiden werden im Folgenden über Schnittebenen definiert. Bemerkenswert ist hier, dass all die hier relevanten Schnittkurven der Schnittebenen mit dem Ellipsoiden wiederum Ellipsen sind.

Der Meridiankrümmungskreis eines Punktes P liegt in der meridianen Ebene $E_m(P)$, die durch die Punkte P und C (siehe Abbildung 20) für die Normalengerade n sowie durch den Scheitelpunkt B aufgespannt wird (siehe Abbildung 20); $E_m(P)$ enthält damit auch die Symmetrieachse und ist in der Abbildung 20 einfach die Zeichenebene.

Schnittfigur von $E_m(P)$ und Ellipsoid ist der Längenkreis (Meridian) durch P. Der meridiane Krümmungskreis approximiert diesen Meridian in einer Umgebung des Punktes P. Sein Mittelpunkt ist der Punkt D, der im Abstand R_m von E zwischen den Punkten E und C liegt.

Der Meridiankrümmungsradius R_m ist der eine der beiden Hauptkrümmungsradien am Punkt P:

$$R_m(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{[1-e^2\sin^2\phi]^{3/2}} \quad \bar{D}P = R_m$$

Der *vertikale* oder Normalkrümmungskreis am Ellipsoidpunkt P liegt in der Ebene $E_n(P)$, die vertikal (senkrecht) auf der Meridianebene $E_m(P)$ steht; $E_n(P)$ enthält somit auch die Tangentengerade t_b am *Breitenkreis* des Ellipsoids im Punkt P. $E_n(P)$ und t_b stehen senkrecht zur Zeichenebene der Abbildung 20.

Schnittfigur von $E_n(P)$ und Ellipsoid ist eine *querliegende* Ellipse. Der Normalkrümmungskreis approximiert diese querliegende Schnittellipse in einer Umgebung des Punktes P. Dieser Kreis hat seinen Mittelpunkt im Punkt C, dem Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Normalengeraden n_p durch den Punkt P. Diese Normalengerade n_p steht senkrecht auf der Tangentengerade t_m am Meridian.

Der Normalkrümmungsradius R_n im Punkt P ist der andere der beiden Hauptkrümmungsradien:

$$R_n(\phi) = \frac{a}{[1-e^2\sin^2\phi]^{1/2}} \quad \bar{C}P = R_n$$

Der Normalkrümmungsradius R_n im Punkt P ist der maximale Krümmungsradius des Ellipsoids im Punkt P, der meridiane Krümmungsradius R_m im Punkt P ist der minimale Krümmungsradius des Ellipsoids im Punkt P.

(26) ... mithilfe von ‚Eulers Formula‘

Die beide Radien erfüllen für jeden Punkt die nebenstehende Ungleichung:	$(1 - e^2) R_n \leq R_m \leq R_n$ $\bar{EP} = (1 - e^2) R_n$
Der Gaußsche Krümmungsradius R_G im Punkt P ist das geometrische Mittel beider Hauptkrümmungsradien R_n und R_m :	$R_G(\phi) = \sqrt{R_m(\phi) \cdot R_n(\phi)}$ $R_G(\phi) = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \phi}$

Dieser Gaußsche Krümmungsradius R_G wird häufig verwendet, um an einem Punkt auf dem Ellipsoiden eine Schmiegekugel, auch Schmiegekugel genannt, anzuheften, die das Ellipsoid in einer Umgebung des Punktes bestmöglich approximiert.

C. Die Längenkorrektur durch die Abbildungsreduktion

Der professionelle Anwender arbeitet gerne mit hinreichenden Faustformeln. Otto Heunecke²⁷ gibt in seinem Papier eine knappe Formel zur Reduktion von Längen bei der UTM-Abbildung an.

S_{ell} ist die Länge zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 auf dem Ellipsoiden, S_{UTM} ist die zugehörige Länge in der Koordinatenebene, m_{UTM} ist der Skalierungsfaktor.	$S_{UTM} = S_{ell} \cdot m_{UTM} \quad S_{ell} = S_{UTM} / m_{UTM}$ $m_{UTM} = m_0 \cdot \left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{2 m_0^2 R_B^2} \right)$
Der UTM-Abbildungsmaßstab m_0 für den Bezugsmeridian:	$m_0 = 0,999.6$
Längs über ganz Deutschland gemittelter Gaußscher Krümmungsradius R_B :	$R_B = 6.382 [km]$
Die horizontalen Abstände y_i der UTM-Punkte $P_i(E_i, N_i)$ vom Bezugsmeridian mit den Rechtswerten E_i :	$y_i = E_i - 500.000 [m]$

Otto Heunecke beschränkt die Anwendung dieser Faustformel auf längere Strecken, die kürzer als 5 km sein sollen; ich wage es und wende sie großzügig für noch längere Strecken in der Gegenrichtung $S_{UTM} \rightarrow S_{ell}$ an.

Korrekturen	Strecke		Azimut <i>geo. N.</i>	Länge <i>UTM</i>	Korrektur <i>UTM → ell</i>
	<i>von</i>	<i>bis</i>			
$S_{ell} - S_{UTM}$	Gilching	- wendelstein	130,59°	69,3 km	0,57 m
	Gilching	- Benediktenwand	167,28°	52,2 km	0,43 m
	Gilching	- Nebelhorn	223,80°	105,5 km	17,48 m

Die Längenkorrekturen sind ‚erwartungsgemäß klein‘; selbst für den Abstand zum Nebelhorn macht die Längenkorrektur mit 17,48 m weniger als 0,02% aus.

Otto Heunecke gibt in dem erwähnten Papier weitere nützliche Information für den UTM-Anwender preis, etwa zur Geoidundulation oder zur Höhenkorrektur - sehr hilfreich für den Anwender.

(27) Siehe Heunecke im Literaturverzeichnis

D. Die Überprüfung der Abstände und Winkel

Mein gefühlter Missbrauch obiger Faustformel zur Längenkorrektur hat mich bewogen, doch noch etwas nachzuhaken, um die hinreichende Genauigkeit meiner Berechnungen von Abstand und Azimut zu überprüfen.

Die geodätische Verbindung (Geodäte) zweier Punkte auf dem *Ellipsoiden* ist deren kürzeste Verbindung, die den Abstand der Punkte auf dem Ellipsoiden definiert. Und auch der gesuchte Richtungswinkel vom Beobachter hin zum Gipfel dürfte durch das Azimut an der Geodäte, gemessen am Beobachterpunkt, hinreichend definiert sein.

In der zweidimensionalen *Koordinatenebene* entspricht der geradlinigen Verbindung der zugeordneten Koordinatenpunkte einer Kurve, die alle UTM-Koordinatenlinien in einem konstanten Winkel schneidet. Und diese geradlinige Verbindung in der Koordinatenebene hat als Urbild auf dem Ellipsoiden *nicht* die eben aufgeführte kürzeste Verbindung (Geodäte).

Da könnte man schon die Frage stellen, wie es sich mit den Abständen und Richtungswinkeln für die zwei Verbindungskurven, der Strecke in der Koordinatenebene und der geodätischen Verbindung auf dem Ellipsoiden, verhält; für hinreichend kleine Abstände sollten Unterschiede in Länge und Richtungswinkel im praktischen Gebrauch zumeist vernachlässigbar sein. Ich wollte hier aber nicht nur auf meine diesbezüglichen Erfahrungen verweisen und will zumindest im Beispiel die hinreichende Genauigkeit meiner Rechnerei unterfüttern.

Ich möchte dabei Python-Pakete aus dem Umfeld Geodäsie zu verwenden, die die emsige Python-Gemeinschaft bereit gestellt hat. Meine Wahl fiel auf das ansprechende Python-Paket *nvector*. Ein Beispiel zur Berechnung von Längen und Winkel einer geodätischen Verbindung zwischen 2 Punkten auf – oder auch über! – dem Ellipsoid GRS80 war zu meiner Freude schnell gefunden und schnell angepasst – zu meiner Freude, denn auch die Ergebnisse passen.

```

test-n-vector.py

import nvector as nv;
import math;

rd2dg=180.0/math.pi;
grs80 = nv.FrameE(name='GRS80');

def convertAzi(azi) -> float:
    azi=azi*rd2dg;
    if azi<0.0: azi=azi+360.0;
    return azi;
# end def

msg_s = 'Ellipsoid. Abstand = {:6.0f}m';
msg_aziA = 'Azimut A gegen Nord = {:6.2f}°';
msg_aziB = 'Azimut B gegen Nord = {:6.2f}°';

def printData(s,aA,aB) -> None:
    print(msg_s.format(s));
    print(msg_aziA.format(convertAzi(aA)));
    print(msg_aziB.format(convertAzi(aB)));
# end def

# Gilching
pointGilching = grs80.GeoPoint(latitude=48.11124,
                                longitude=11.31067, degrees=True);

# Nebelhorn
pointNebelhorn = grs80.GeoPoint(latitude=47.42200,
                                longitude=10.34282, degrees=True);
print("\nGilching -> Nebelhorn");
s_12,azi1,azi2 = pointGilching.distance_and_azimuth(pointNebelhorn);
printData(s_12,azi1,azi2);

# Wendelstein
pointWendelstein = grs80.GeoPoint(latitude=47.70344,
                                longitude=12.01211, degrees=True);
print("\nGilching -> Wendelstein");
s_12,azi1,azi2 = pointGilching.distance_and_azimuth(pointWendelstein);
printData(s_12,azi1,azi2);

# Benediktenwand
pointBenediktenwand = grs80.GeoPoint(latitude=47.65294,
                                longitude=11.46379, degrees=True);
print("\nGilching -> Benediktenwand");
(s_12,azi1,azi2) = pointGilching.distance_and_azimuth(pointBenediktenwand);
printData(s_12,azi1,azi2);

```

Abbildung 22: Winkel und Abstand auf dem Ellipsoiden mit *nvector*

Für eine kleine Stichprobe an Gipfeln und dem Beobachtungsort Gilching unterhalb des Anwesens Am Rinnerhof 1 habe ich mit *nvector* Abstände und Winkel berechnet (siehe obige Abbildung 22) und die Ergebnisse in der Tabelle auf der nächsten Seite zusammengestellt. ‚Winkel‘ meint hier die Azimute an der jeweiligen Geodäte für die Anfangs- und die Endorte der Kurve; diese Azimute beziehen sich auf den geografischen Norden und laufen von 0° bis 360°.

Berechnungen mit <i>nvector</i>	Berechnungen über UTM-Koordinaten
<u> Gilching -> wendelstein </u> Abstand (ell) : 69,323 km Azimut (gNd) G: 130,59° Azimut (gNd) W: 131,11°	<u> Gilching -> wendelstein </u> Abstand (UTM) : 69,330 km Azimut (uNd) : 128,874° Merikonv. G: 1,721° Azimut (gNd) G: 130,595° Azimut (uNd) : 128,874° Merikonv. W: 2,229° Azimut (gNd) W: 131,103°
<u> Gilching -> Benediktenwand </u> Abstand (ell) : 52,229 km Azimut (gNd) G: 167,28° Azimut (gNd) B: 167,39°	<u> Gilching -> Benediktenwand </u> Abstand (UTM) : 52,228 km Azimut (uNd) : 165,562° Merikonv. G: 1,721° Azimut (gNd) G: 167,283° Azimut (uNd) : 165,562° Merikonv. B: 1,821° Azimut (gNd) B: 167,383°
<u> Gilching -> Nebelhorn </u> Abstand (ell) : 105,527 km Azimut (gNd) G: 223,79° Azimut (gNd) N: 223,08°	<u> Gilching -> Nebelhorn </u> Abstand (UTM) : 105,509 km Azimut (uNd) : 222,079° Merikonv. G: 1,721° Azimut (gNd) G: 223,800° Azimut (uNd) : 222,079° Merikonv. N: 0,989° Azimut (gNd) N: 223,068°
<i>Abstand (ell):</i> Abstand auf dem Ellipsoiden GRS80	<i>Abstand (UTM):</i> Abstand, berechnet über die UTM-Koordinaten <i>Azimut (uNd):</i> Winkel gegen UTM-Gitter Nord. Der Winkel gilt für Ort und Gipfel, also jeweils für (G,W), (G,B) und (G,N).
<i>G/W/B/N:</i> Die Buchstaben stehen für den Beobachterstandort in Gilching und die Gipfel wendelstein, Benediktenwand, Nebelhorn <i>Azimut (gNd) G/W/B/N:</i> Winkel gegen ‚geografisch Nord‘ jeweils für den genannten Ort <i>Merikonv. G/W/B/N:</i> Meridiankonvergenz jeweils für den genannten Ort oder Gipfel	

Verweise und Literatur

Peter Osborne, 2013 <i>The Mercator Projections</i> - The mercator projections the normal and transverse mercator projections on the sphere and the ellipsoid with full derivations of all formulae	https://geomatics.cc/legacy-files/mercator.pdf
Bundesministerium des Innern, für Bau und Heimat Bundesministerium der Verteidigung <i>Verfahrensbeschreibung ETRS89/UTM - Grundlagen zur Anwendung des Koordinatenreferenzsystems</i>	https://www.bfrvermessung.de/fileadmin/bfr/Oktober_2023/VB_Vergabe_V_1_2.pdf
Otto Heunecke, 2017 <i>Planung und Umsetzung von Bauvorhaben mit amtlichen Lage- und Höhenkoordinaten</i>	https://www.ldbv.bayern.de/file/pdf/13727/UTM_zfv_2017_3_Heunecke.pdf
Zeitreise Gilching e.V. <i>Gilching Alpenpanorama</i>	https://www.zeitreise-gilching.de/geologie/gilchinger-alpenpanorama/
alpen-panoramen.de <i>Alpenpanoramen</i>	https://www.alpen-panoramen.de/index.php
Vieles zum <i>Horizont</i> (und zu anderen Fachbegriffen) findet sich auf der Wikipedia:	https://de.wikipedia.org/wiki/Horizont
Dr. Monika Korte IGFZ German Research Centre for Geosciences <i>GRF Declination Calculator</i>	https://isdc.gfz-potsdam.de/igrf-declination-calculator/
Kenneth Gade <i>The n-vector page</i>	https://www.ffi.no/en/research/n-vector
Projekt-Beschreibung nvector	https://pypi.org/project/nvector/
Norwegian Defence Research Establishment <i>Welcome to NavLab.net</i>	https://www.navlab.net/
Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung (Bayern) <i>BayernAtlas</i>	https://atlas.bayern.de/?c=686412,5346924&z=12&r=0&l=atkis&t=ba
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (Österreich) <i>Austrian Map</i>	https://maps.bev.gv.at/#/center/13.35,47.77/zoom/7.9