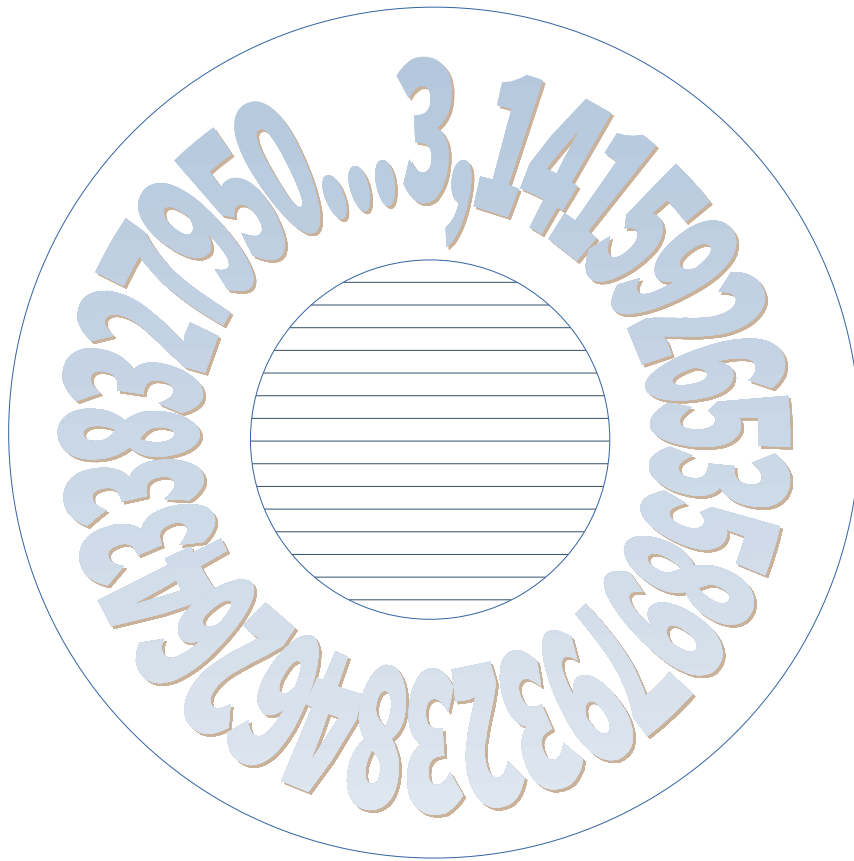


Die Nadel, die Diele und die Zahl π

Das Buffonsche Nadelproblem



Januar 2024

Dr. Bernd Ragutt

Inhaltsverzeichnis

1	Die Aufgabe.....	3
2	Das reale Experiment.....	3
3	Das Problemmodell.....	4
3.1	Das Modell der Diele.....	4
3.2	Die Lage der Wurfnadel.....	5
3.3	Punkteabstände von Geraden.....	7
3.4	Streckenbehandlung.....	8
3.5	Das vereinfachte Problemszenario.....	9
4	Einheitsnadeln.....	10
4.1	Geometrische Betrachtungen.....	10
4.2	Ein Fazit.....	18
4.3	Das virtuelle Experiment mit Python.....	19
5	Kurze Nadeln.....	21
6	Lange Nadeln.....	25
	Anhang.....	28
A.	Simple Integrationen mit SciLab.....	28
B.	Das Paradoxon von Bertrand.....	29
C.	Weitergehende Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen.....	30
D.	Auswertungen der Wurfsimulation mit Calc.....	32
	Verweise und Literatur.....	35

1 Die Aufgabe

Die Kreiszahl π ist eine wundersame Zahl mit wundersamen Eigenschaften, die in Problemstellungen auftaucht, in denen ihr Erscheinen heutzutage kein Erstaunen mehr auslöst, so wie etwa in der Eulerschen Gleichung $e^{i\pi}+1=0$, wo die Zahl π leicht erkennbar in ihrem angestammten Zuhause der Kreisfunktionen wirkt.

Nicht so hier beim Buffonsche Nadelproblem – fand ich damals jedenfalls, als mir das Dielenproblem zum ersten Mal über den Weg lief und ich las, dass die Zahl π in die Lösung einging.

In alten Häusern gibt es sie noch, die Diele, den Hausflur mit einem Bretterfußboden, der aus Dielen, langen, schmalen Brettern, gezimmert wurde, Dielen, die so gerne knarzen, im Alter schließlich ausgetreten sind und am Ende morsch werden. In so einer Diele fällt ihnen eine Stricknadel zu Boden, die gerade so lang wie eine einzelne Diele, also ein Dielenbrett, breit ist; und diese Nadel landet gerade nur auf *einem* dieser Dielenbretter längs dessen langer Dielseite. Das macht sie stutzig. Wie der Zufall es will? Wie will es der Zufall? Also lassen sie die Nadel erneut fallen, sie fällt und landet nun quer zu den Holzdielen auf deren *zwei* an der Zahl. Und eine Landung auf *drei* Dielenbrettern? Klar, eine längere Stricknadel müsste her.

Die Frage - und somit die Aufgabe - stellt sich, wie wahrscheinlich es eigentlich ist, dass die Nadel auf zwei Dielenbretter oder eben auf genau nur einem Dielenbrett landet. Und mit der Antwort sollte auch geklärt sein, wieso die Zahl π hier eine Rolle spielt.

2 Das reale Experiment

Mein Versuch, im Badezimmer mit einem passend zugeschnittenen Holzstäbchen zu auswertbaren Zahlen zu gelangen, scheiterte kläglich. Es war schnell ersichtlich, dass die breiten und rauhen Fliesenfugen zumeist die Ruhelage des Holzstäbchens mitbestimmten und somit dem waltenden Zufall ein Schnippchen schlugen.

Dem Theoretiker liegt das Experiment auch nicht so sehr am Herzen, er legt das Holzstäbchen beiseite, legt sich Grips, Stift und Papier zurecht und schaltet die elektronischen Helferlein dazu.

3 Das Problemmodell

3.1 Das Modell der Diele

Das Problem lässt sich als ein zweidimensionales in der Ebene darstellen, der Wurf in der dritten Dimension soll keine weitere Rolle spielen, außer dass die Nadel ‚zufällig‘ irgendwo auf der Diele landet.

Als Modell der Diele mit ihren Dielenbrettern wird eine Schar paralleler Geraden in der Ebene ausgebreitet, siehe »Abbildung 1: Modell der Diele (Dielenausschnitt)«. Die Geraden stehen für die Ränder der Dielenbretter. Fugen zwischen den Dielenbrettern gibt es keine. Der Abstand dieser Geraden (und damit die Breite der einzelnen Diele) wird zunächst auf 1 Längeneinheit¹ festgelegt.

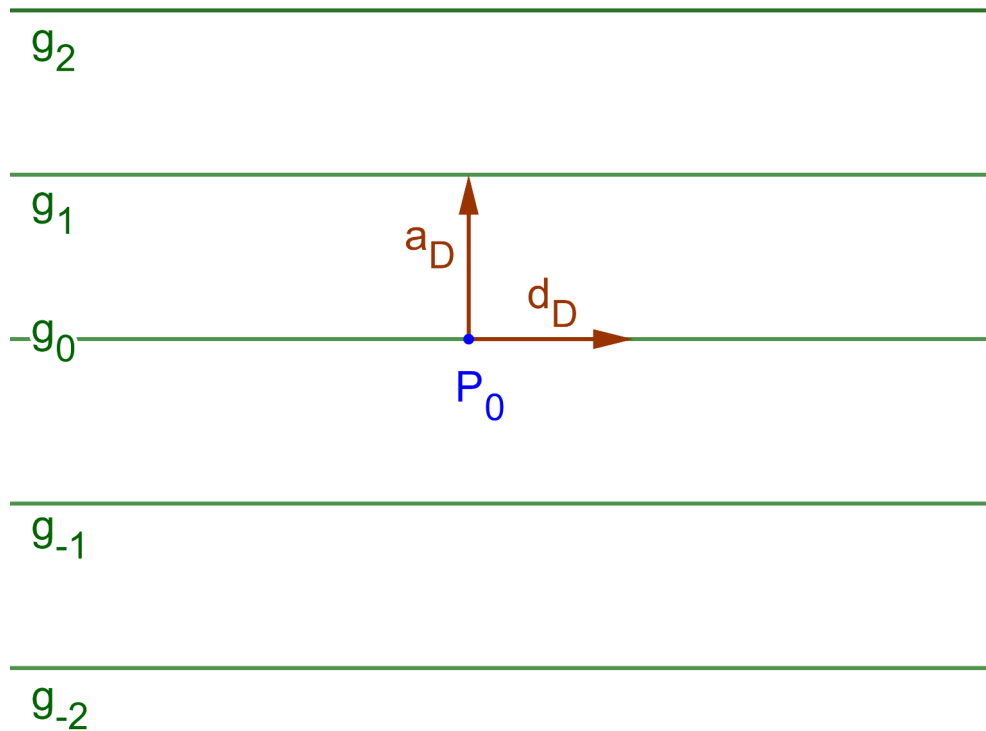


Abbildung 1: Modell der Diele (Dielenausschnitt)

Die Anzahl und die Ausdehnung der Geraden sei unbeschränkt. Diese Geradenschar wird charakterisiert durch den horizontalen Richtungsvektor \mathbf{d}_D für die Geraden und den vertikalen Abstandsvektor \mathbf{a}_D der aktuellen Länge 1 LE zwischen benachbarten Geraden. Das tiefgestellte D steht für Diele. Der ansonsten willkürliche P_0 markiert einen beliebigen Punkt auf der Referenzgeraden g_0 .

Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{d}}_D$ und $\hat{\mathbf{a}}_D$ stehen senkrecht aufeinander, ihr Skalarprodukt verschwindet daher.

$$\hat{\mathbf{a}}_D \cdot \hat{\mathbf{d}}_D = 0$$

(1) Abgekürzt mit 1 LE

Die Punkte $P_n(t)$ der n -ten Geraden g_n liefert eine parametrische Geradengleichung.

$$P_n(t) = (P_0 + n \hat{a}_D) + t \hat{a}_D \quad n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$$

Die Wurfnadel wird als eine eindimensionale Strecke modelliert. Die Streckenenden werden nicht unterschieden. Die Länge der Strecke und der Abstand der Dielengeraden sollen zunächst übereinstimmen.

3.2 Die Lage der Wurfnadel

Um die Lage der Wurfnadel oder Strecke in der Dielenebene zu beschreiben, wähle ich 2 Größen, erstens den zweidimensionalen Ort P_M des Mittelpunktes der Strecke und zweitens einen Winkel $\alpha_s \in (-\pi/2, \pi/2]$, der die Orientierung der Strecke bezogen auf eine feste Achse festlegt. Als Drehpunkt des Winkels bietet sich der Mittelpunkt P_M an und als Bezugsachse des Winkels das Lot vom Mittelpunkt P_M auf die parallelen Geraden.

Es wird sich zeigen, dass sich die Zahl der relevanten Freiheitsgrade von 3 auf 2 reduziert. Schneidet die Strecke nämlich eine beliebige Gerade, so wird diese Gerade auch geschnitten, wenn man die Strecke in Richtung der Geraden verschiebt; ebenso wird wieder eine Gerade geschnitten, wenn die Strecke in vertikaler Richtung um ein ganzzahliges Vielfaches der Breite eines Dielenbrettes verschoben wird.

Für die Frage „Schnittpunkt von Strecke und Gerade: Ja oder Nein?“ ist daher neben dem Orientierungswinkel der Strecke α_s nur die relative Lage der Strecke zur *nächstgelegenen* Gerade von Bedeutung. Diese relative Lage wird durch den lotrechten Abstand a_M des Streckenmittelpunktes P_M zur *nächstgelegenen* Geraden beschrieben, wobei hier das ‚nächstgelegenen‘ bedeutet, dass der Abstand a_M auf Werte aus dem Intervall $(-1/2, 1/2]$ beschränkt ist, denn nur unter dieser Bedingung kann es überhaupt diesen Schnittpunkt mit der nächstgelegenen Geraden geben.

Jedes Parameterpaar $(a_M, \alpha_S) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \otimes (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ steht dann für eine Menge von äquivalenten Strecken und bezeichnet somit eine Äquivalenzklasse von Strecken, als deren ein Repräsentant diejenige Strecke gewählt werden kann, die mit dem Abstand a_M nächstgelegenen zur Geraden g_0 liegt. Siehe dazu die folgende Abbildung 2.

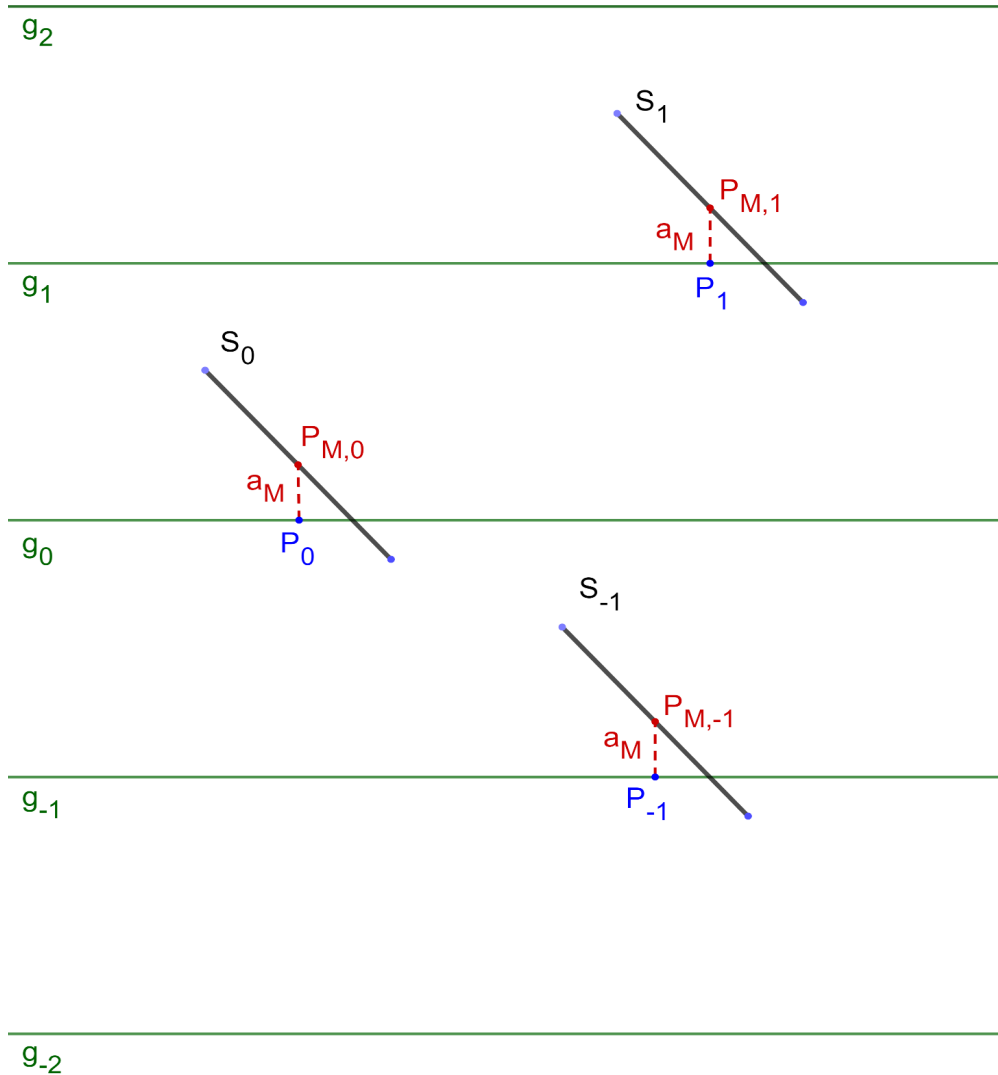
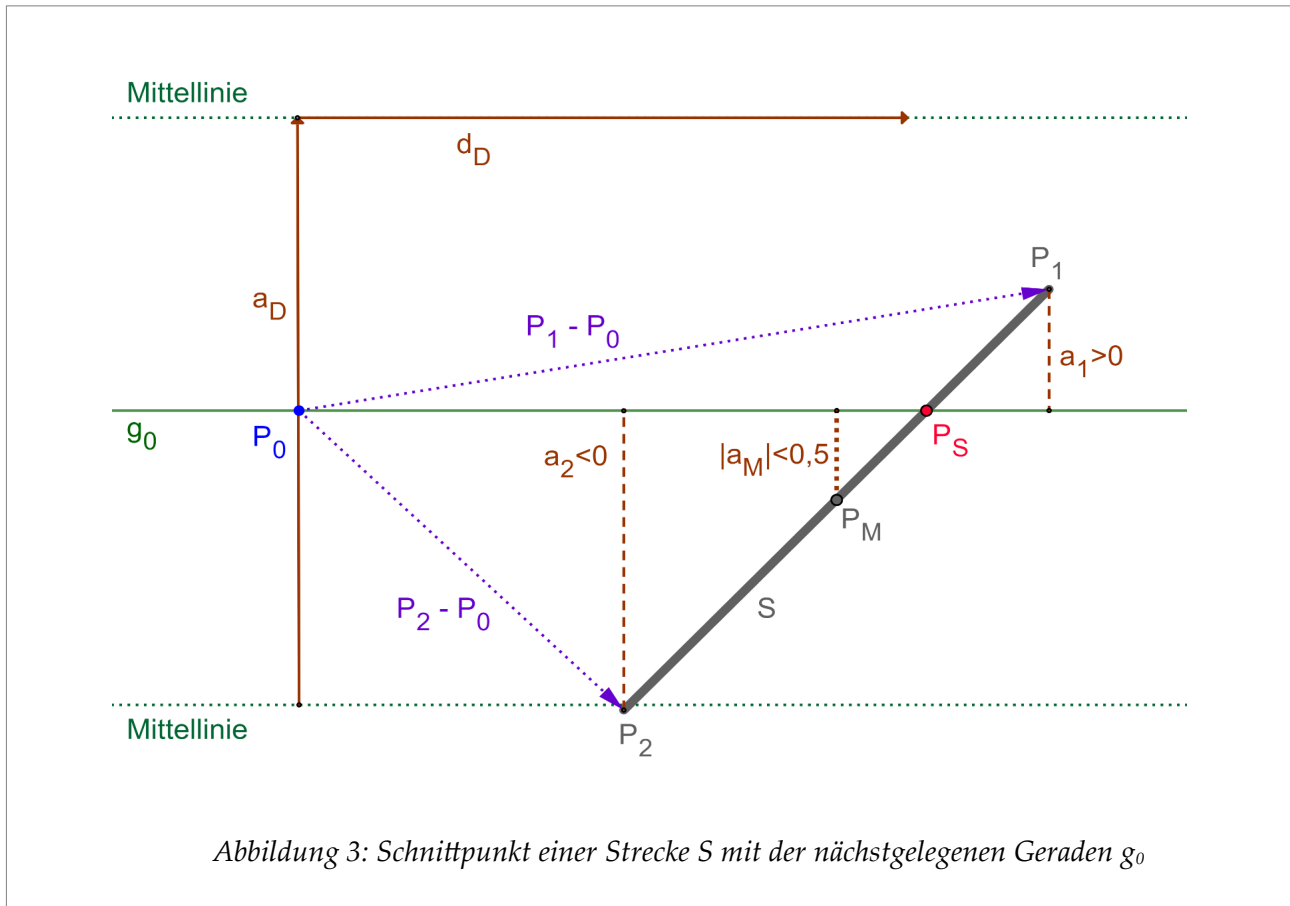


Abbildung 2: Zwei Strecken S_1 und S_{-1} mit ihrem äquivalenten Repräsentanten S_0

3.3 Punkteabstände von Geraden

Sei P_0 ist ein Punkt auf der Geraden g_0 . In der Dielebene ergibt sich der lotrechte Abstand eines beliebigen Punktes P von der Geraden g_0 als die Länge des Vektors, den man erhält, wenn man den Vektor $(P - P_0)$ auf den auf g_0 senkrecht stehenden Einheitsvektor \hat{a}_D projiziert; siehe dazu die folgende Abbildung 3.



Es gilt also für die Abstände der Punkte P_M , P_1 und P_2 von der Geraden g_0 :

$$a_M = \hat{a}_D \cdot (P_M - P_0) \quad a_1 = \hat{a}_D \cdot (P_1 - P_0) \quad a_2 = \hat{a}_D \cdot (P_2 - P_0)$$

Der Punkt P_1 liegt hier, bezogen auf die Gerade g_0 , in der oberen Halbebene, also in der Halbebene, in die der Normalenvektor \hat{a}_D zeigt. Der Abstand a_1 des Punktes P_1 von der Geraden g_0 ist dann positiv. Die Punkte P_2 und P_M liegen in der unteren Halbebene, die Abstände a_2 und a_M sind negativ.

Eine Strecke ist die geradlinig durchgehende Verbindung zwischen zwei Endpunkten. Hat der eine Endpunkt der Strecke einen positiven Abstand zur Geraden g_0 und der andere Eckpunkt einen negativen, so muss es einen Punkt auf der Strecke geben, der den Abstand 0 zur Geraden hat. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt P_S zwischen Strecke und Geraden.

Die so definierten Abstände sind unabhängig davon, wo der Punkt P_0 auf der Geraden g_0

$$\tilde{P}_0 = (P_0 + \lambda \hat{a}_D) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{a}_M = \hat{a}_D \cdot (P_M - \tilde{P}_0)$$

liegt. Denn für einen Punkt \tilde{P}_0 , der um den Wert λ auf der Geraden verschoben wird, gilt:

$$\tilde{a}_M = \hat{a}_D \cdot (P_M - P_0) + \lambda (\hat{d}_D \cdot \hat{a}_D) = a_M$$

3.4 Streckenbehandlung

Gegeben sei nun der Mittelpunkt P_M einer Strecke S der Länge 1 LE; zudem sei der Winkel α_S bekannt, um den die Strecke S um den Punkt P_M aus der Vertikalen (im Uhrzeigersinn) herausgedreht ist; siehe dazu die folgende Abbildung 4.

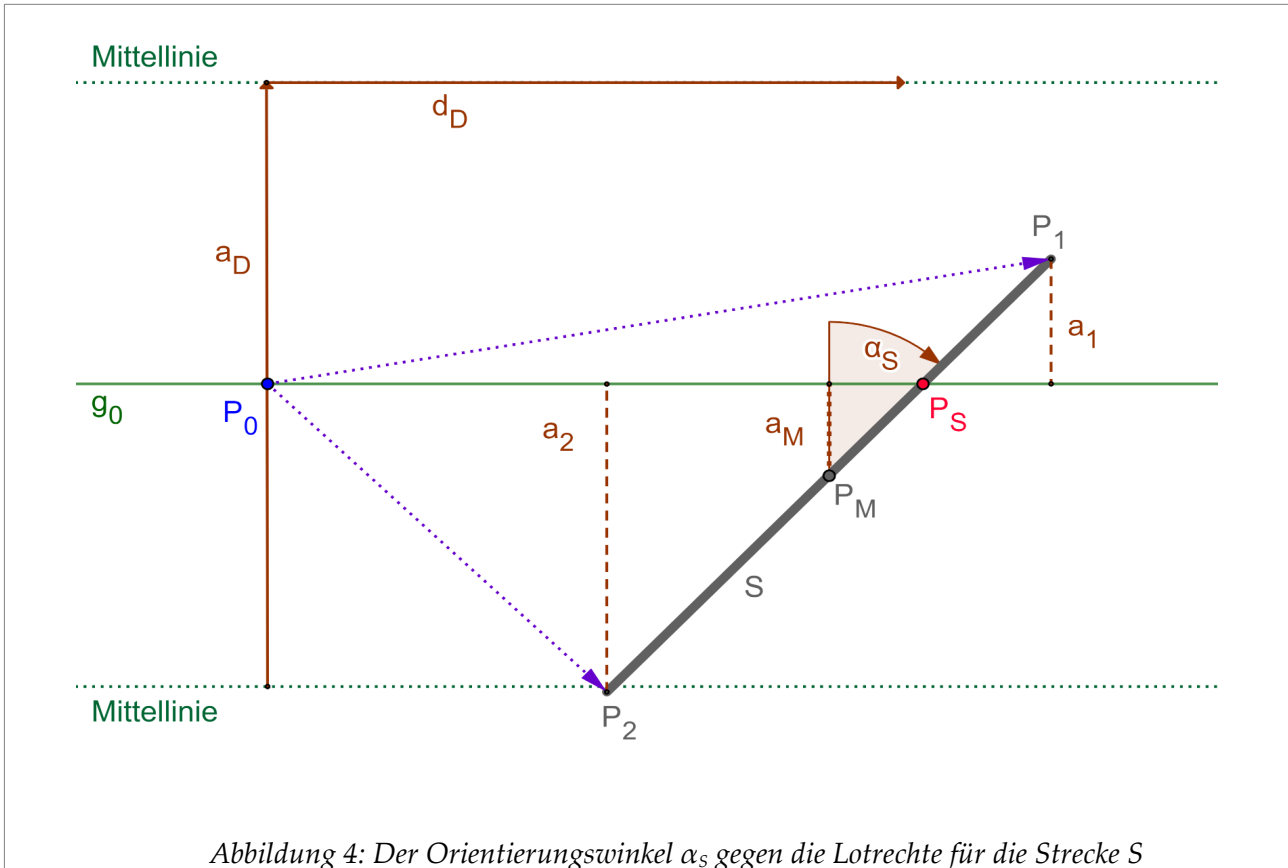


Abbildung 4: Der Orientierungswinkel α_S gegen die Lotrechte für die Strecke S

Der Richtungsvektor \hat{d}_S für die Strecke S ist allgemein definiert durch seine Endpunkte P_1 und P_2 :

$$\hat{d}_S = \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|}$$

Die Strecke S selbst wird hier als *ungerichtete* geometrische Größe betrachtet, denn beim Werfen einer Nadel, deren ein Ende etwa durch einen kleinen Farbklecks markiert worden ist, soll nicht unterschieden werden, in welcher Richtung die Nadel zum Liegen kommt; mit anderen Worten, ohne die Markierung wären die Nadelenden nicht unterscheidbar.

Der Orientierungswinkel α_S der Strecke S gegenüber der Lotrechten ist dann gegeben durch die Skalarprodukte des Richtungsvektors \hat{d}_S mit den Vektoren \hat{a}_D und \hat{d}_D .

$$\hat{a}_D \cdot \hat{d}_D = 0$$

$$\cos \alpha_S = \hat{d}_S \cdot \hat{a}_D$$

$$\sin \alpha_S = \hat{d}_S \cdot \hat{d}_D$$

$$-\frac{1}{2} \pi < \alpha_S \leq \frac{1}{2} \pi$$

Der auf die Länge 1 normierte Richtungsvektor \hat{d}_S ergibt sich nun ohne Weiteres auch direkt aus dem Orientierungswinkel α_S mittels ein wenig einfacher Geometrie.

$$\hat{d}_S = \hat{d}_D \sin \alpha_S + \hat{a}_D \cos \alpha_S$$

Damit lassen sich aus den gegebenen Daten, also dem Mittelpunkt P_M und dem Orientierungswinkel α_S , die Endpunkte der Strecke P_1 und P_2 berechnen – und damit auch die Abstände dieser Endpunkte zur nächstgelegenen Geraden. Weiteres findet sich in meiner Schrift „Formeln zur ebenen Geometrie“ (siehe »Verweise und Literatur« im Anhang).

$$P_1 = P_M + 0,5 \hat{d}_S$$

$$P_2 = P_M - 0,5 \hat{d}_S$$

3.5 Das vereinfachte Problemszenario

Die *nächstgelegene* Gerade g_m ($m \in \mathbb{Z}$) einer Strecke S mit dem Streckenmittelpunkt P_M ist diejenige Gerade, für die der Abstand a_M des Punktes P_M zu dieser Geraden g_m zwischen $-1/2$ und $+1/2$ liegt, denn nur unter dieser Bedingung kann unsere Nadel die Gerade g_m für gewisse Winkel α_S , $-\pi/2 < \alpha_S \leq \pi/2$, überhaupt schneiden.

Allerdings erübrigt sich für eine Lösungsfindung die algorithmische Suche nach dieser nächstgelegenen Geraden g_m . Die dem Problem innewohnenden Symmetrien lassen nämlich ein stark vereinfachtes Problemszenario zu: Es fiele etwa die Nadel S' mit den Endpunkten P'_1 und P'_2 in direkter Nähe zur m -ten Geraden zu Boden, und zwar mit den folgenden Daten:

- dem Nadelmittelpunkt P'_M
- dem Orientierungswinkel α'_S
- sowie den Abständen a'_1 und a'_2 zur Geraden g_m .

Dann überführen die nebenstehenden Translationen das Ausgangsszenario (nämlich die Strecke S' in der Nachbarschaft zur Geraden g_M) in ein äquivalentes, nämlich in eine Strecke S relativ zur Referenzgeraden g_0 .

$$T_{v,m}(P) = P - m \hat{a}_S \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$T_{h,\lambda}(P) = P + \lambda \hat{d}_S \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Die Translationen wirken in vertikaler ($T_{v,m}$) oder in horizontaler Richtung ($T_{h,\lambda}$). Ein explizites Ausführen der Transformationen, die die Strecke S' in die Strecke S überführen, erspare ich mir.

Der Orientierungswinkel und die Abstände zur nächstgelegenen Geraden bleiben unter diesen Transformationen erhalten. Die unterstrichenen Größen beziehen sich auf die Referenzgerade g_0 .

$$\begin{aligned} a'_M &= a_M \\ a'_1 &= a_1 \\ a'_2 &= a_2 \\ \alpha'_S &= \alpha_S \end{aligned}$$

Zudem kann der beliebige Parameter λ in der horizontalen Transformation $T_{h,\lambda}$ jedes Mal so gewählt werden, dass die x -Koordinate des Mittelpunktes P_M der transformierten Strecke S verschwindet. Der Punkt P_M liegt dann auf der y -Achse eines geeignet gewählten Koordinatensystems.

$$P_M = \begin{pmatrix} 0 \\ a_M \end{pmatrix}$$

$$-1/2 < a_M \leq 1/2$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es daher ausreichend, in einem vereinfachten Problemszenario ausschließlich Strecken S in der Umgebung *einer* Geraden, hier g_0 , zu betrachten, deren Mittelpunkte P_M zum einen alle auf einer gewählten y -Achse liegen und zum anderen höchstens (vom Betrage her) den Abstand $\frac{1}{2}$ von dieser Geraden g_0 haben.

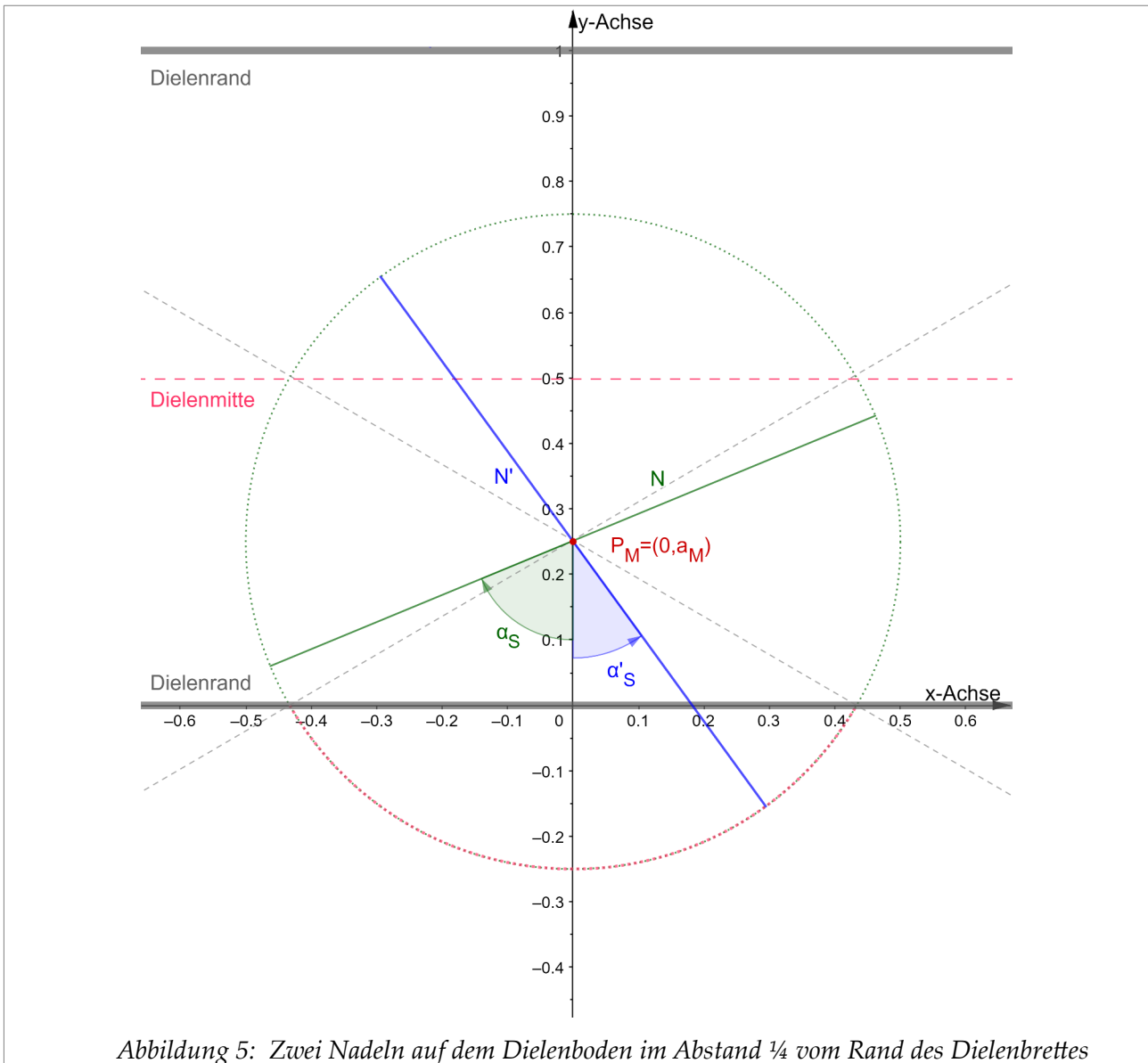
4 Einheitsnadeln

4.1 Geometrische Betrachtungen

Ein kartesisches Koordinatensystem für unsere Problemebene soll noch explizit festgelegt werden: Dessen x -Achse verlaufe in Richtung des Vektors \hat{a}_D entlang der Dielengeraden g_0 , die y -Achse stehe senkrecht dazu in Richtung des Vektors \hat{a}_D , der Nullpunkt des Koordinatensystems liege irgendwo auf der Geraden g_0 .

Als ein Einstieg in ein weitergehendes Problemverständnis betrachte ich eine Schar Nadeln in der Dielenebene, deren *gemeinsamer* Mittelpunkt P_M in der Nähe der x -Achse auf der positiven y -Achse liegt, sodass der nächstgelegene Dielenrand gerade die oben gewählte x -Achse ist. Es sei also $P_M=(0, a_M)$ mit der ‚Nähebedingung‘ für die Lage der Nadel $0 < a_M \leq \frac{1}{2}$. (Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es unerheblich, ob solch ein Intervall offen, halboffen oder geschlossen ist, da die Randpunkte für die Wahrscheinlichkeitsberechnung keinen Beitrag liefern.)

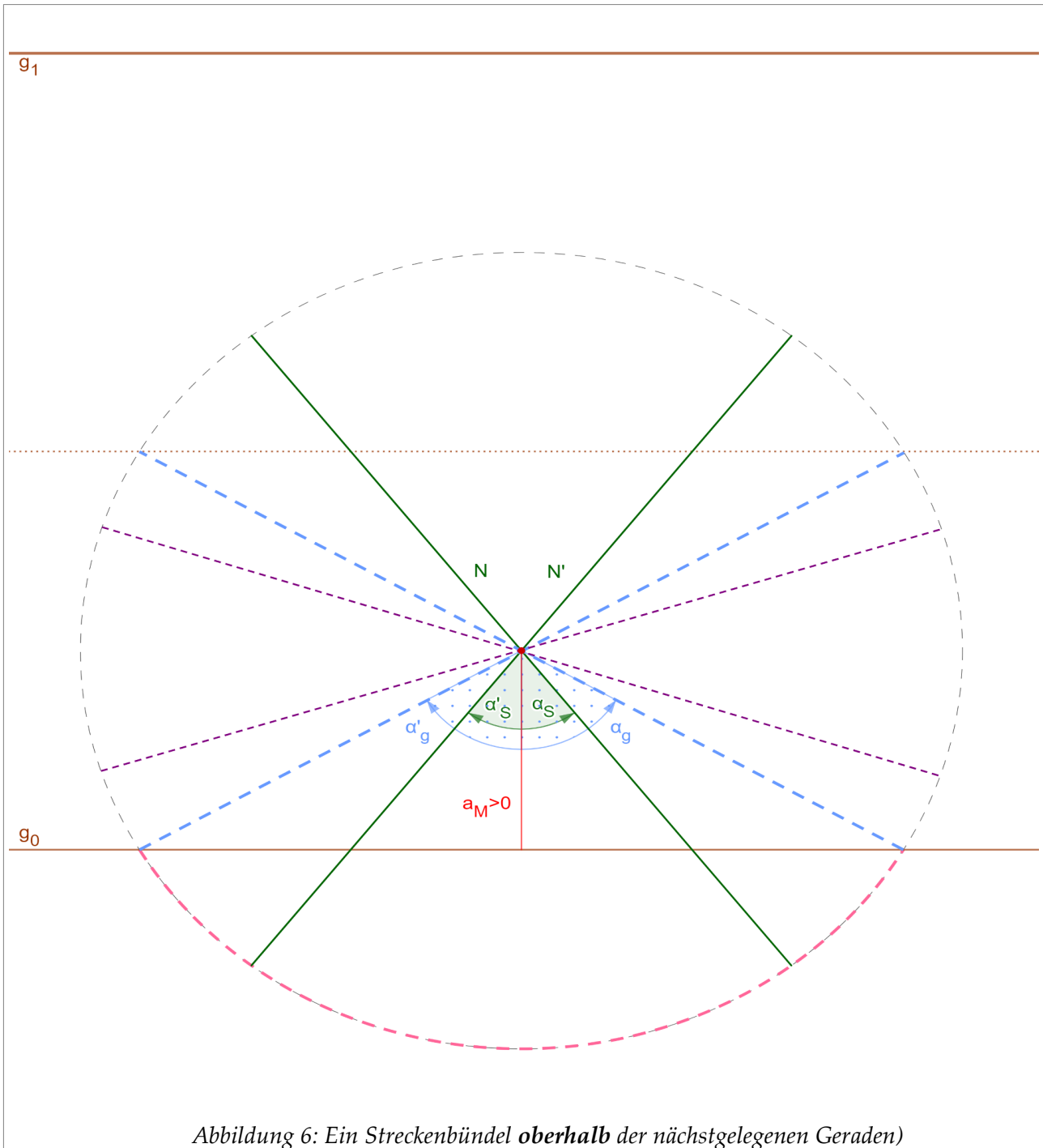
Die folgende Abbildung 5² zeigt zwei solcher Nadeln mit dem Mittelpunkt $M=(0, \frac{1}{4})$: die grün eingefärbte Nadel N liegt dabei innerhalb eines Dielenbrettes, schneidet also keinen Dielenrand, die blau eingefärbte Nadel N' liegt dagegen auf zwei Dielenbrettern und schneidet somit den unteren Rand eines Dielenbrettes (hier die x-Achse).



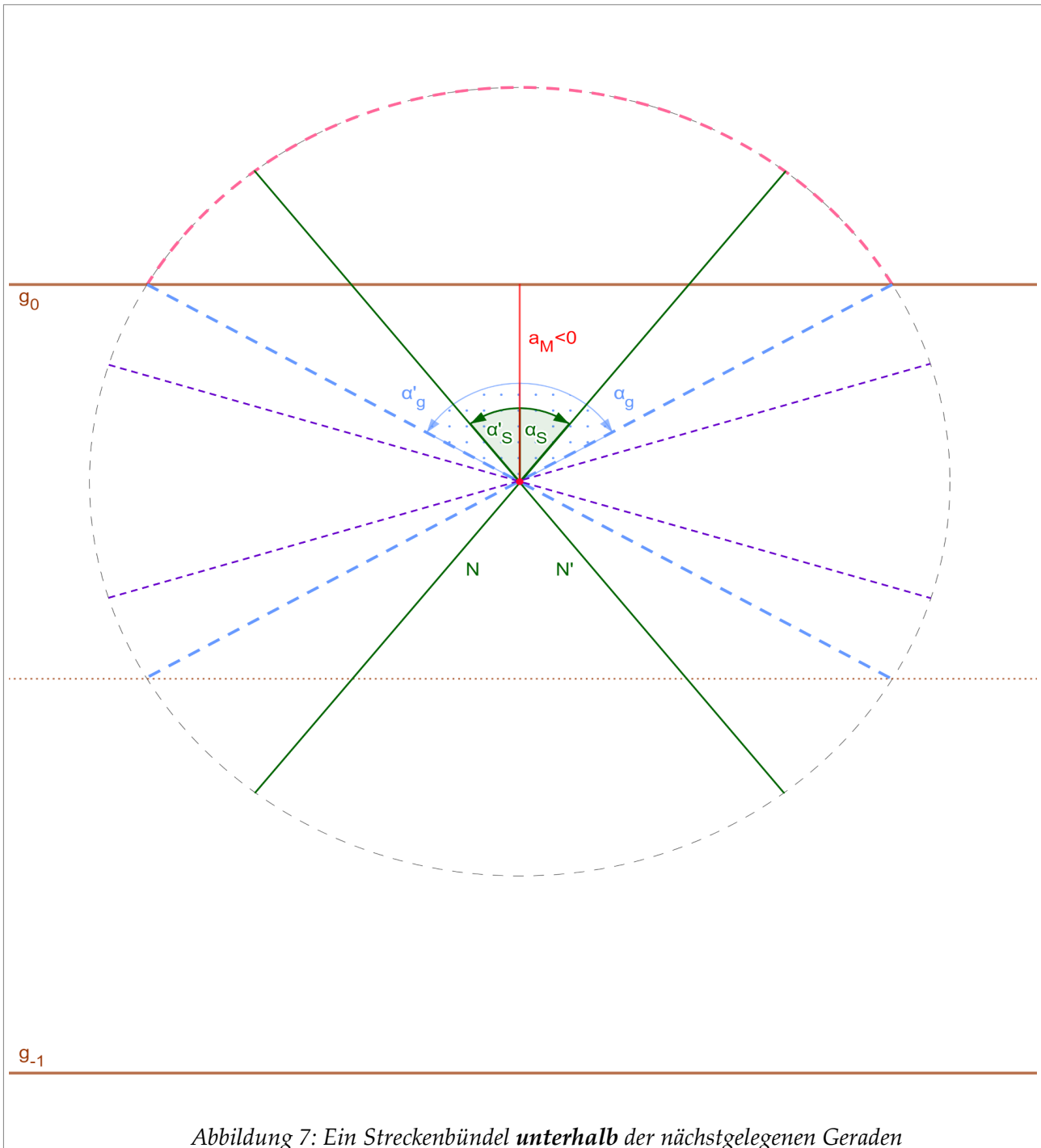
Offensichtlich bestimmen bei einem gegebenem Wert für a_M die Werte der Drehwinkel α_s und α'_s der Nadeln, ob diese den Dielenrand schneiden oder nicht.

(2) Das zum Erstellen der Grafik verwendete Werkzeug Geogebra verwendet den Dezimalpunkt als Dezimaltrennzeichen.

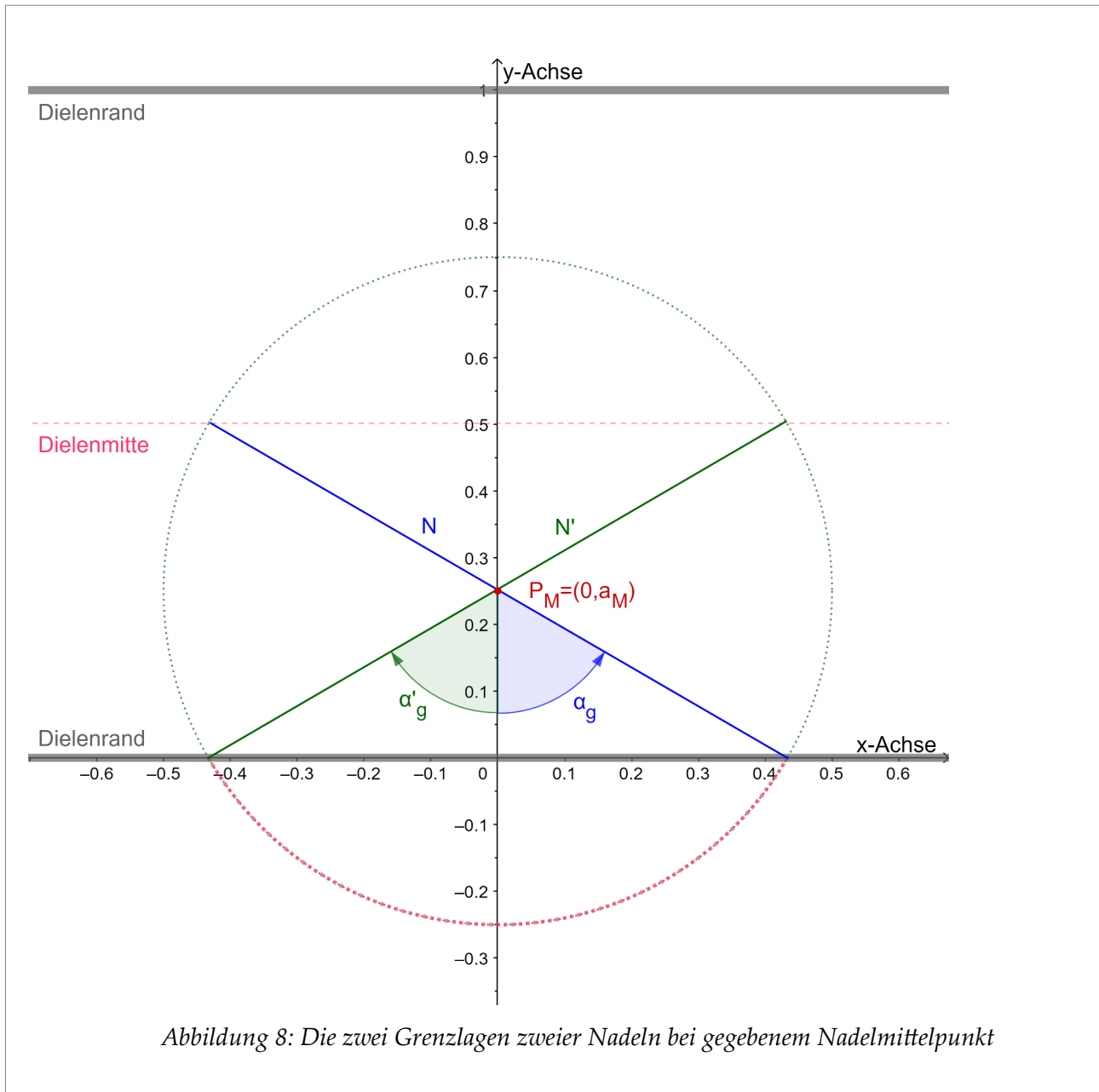
Die folgende Abbildung 6 zeigt beispielhaft ein Streckenbündel, deren gemeinsamer Streckenmittelpunkt P_M **oberhalb** der nächstgelegenen Geraden g_0 liegt.



Die nächste Abbildung 7 zeigt ein Streckenbündel, deren gemeinsamer Streckenmittelpunkt P_M nun **unterhalb** der nächstgelegenen Geraden g_0 liegt.



Aus der nächsten Abbildung 8 ist nun ohne Weiteres das Kriterium ersichtlich, welches darüber Auskunft gibt, wann Nadeln mit dem Nadelmittelpunkt P_M den nächstgelegenen Dielenrand, hier die x -Achse, schneiden oder nicht schneiden.



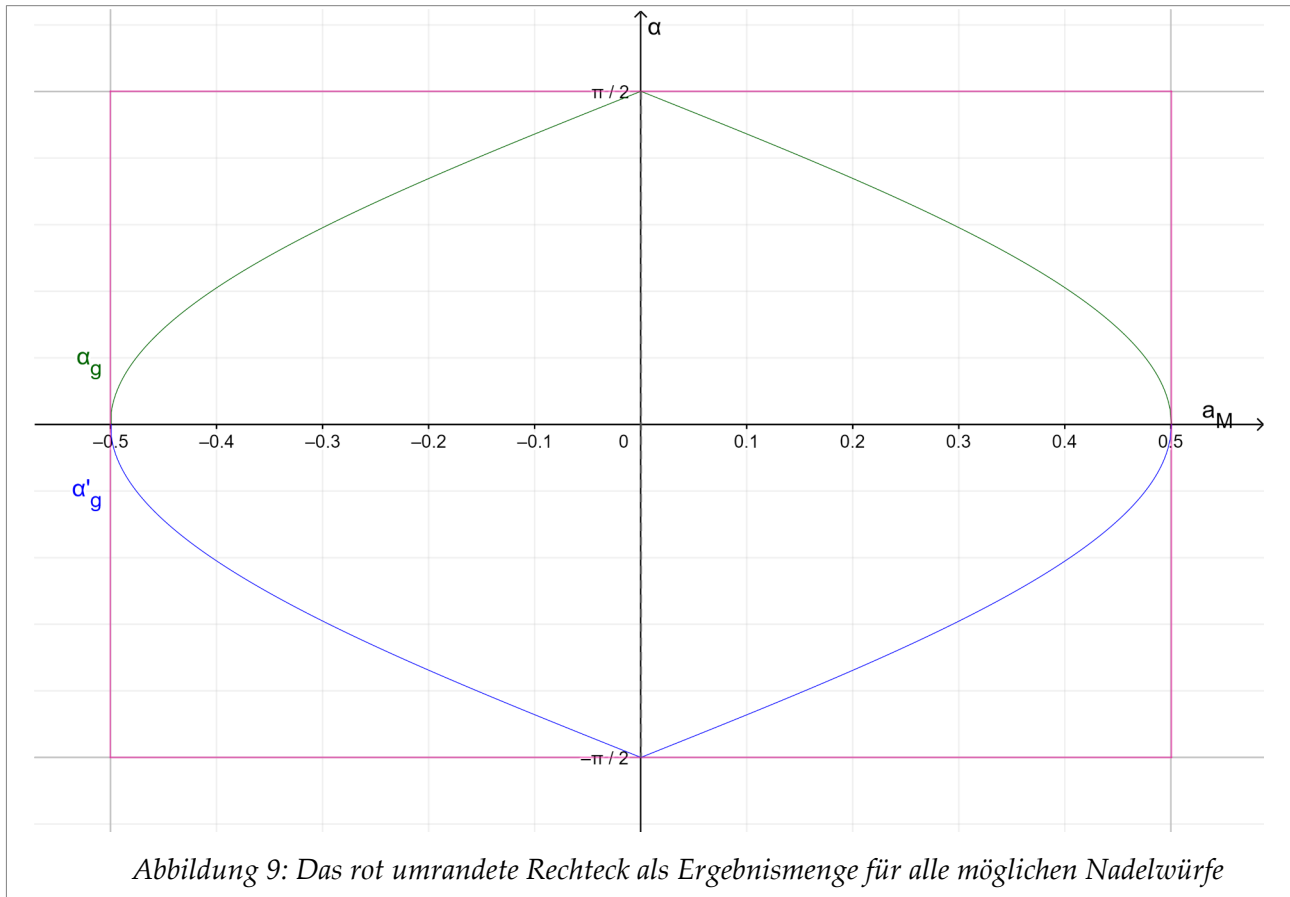
Die Grenzwinkel α_g und α'_g werden laut obiger Abbildung 8 jeweils durch die Ankatheten und die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke bestimmt, die Ankatheten haben die Länge a_M , die Hypotenusen die konstante Länge $\frac{1}{2}$. Somit ergibt sich für die Grenzwinkel:

$$\cos \alpha_g = \frac{|a_M|}{\frac{1}{2}} = 2 |a_M| \qquad \alpha_g = \arccos(2 |a_M|)$$

$$\alpha'_g = -\alpha_g$$

In unserem vereinfachten Problemszenario entspricht *jedem* Parameterpaar aus Abstand und Winkel $(a_M, \alpha_s) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \otimes (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ein mögliches Ergebnis eines Nadelwurfes. Jedes

dieser Wertepaare (a_M, α_S) lässt sich geometrisch als ein Punkt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 und π darstellen. In der nächsten Abbildung 9 ist dieses Rechteck mit seinen rot eingefärbten Seitenlinien abgebildet. Dabei sind auf der Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Abstände a_M von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$ abgetragen, auf der Ordinate die Winkel³ α_S von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$. Jedem Punkt des Rechtecks entspricht einem möglichen Wurfresultat und umgekehrt.



Zudem sind in das Ergebnisrechteck der obigen Abbildung 9 die Graphen der Grenzwinkel $\alpha_g(a_M)$ und $\alpha'_g(a_M) = -\alpha_g(a_M)$ eingezeichnet. Diese Graphen trennen Punktmen- gen, die aus Punkten bestehen, deren zugeordnete Strecken die nächstgelegenen Ge- rade schneiden, von solchen, bei denen sich Strecken und Gerade *nicht* schneiden.

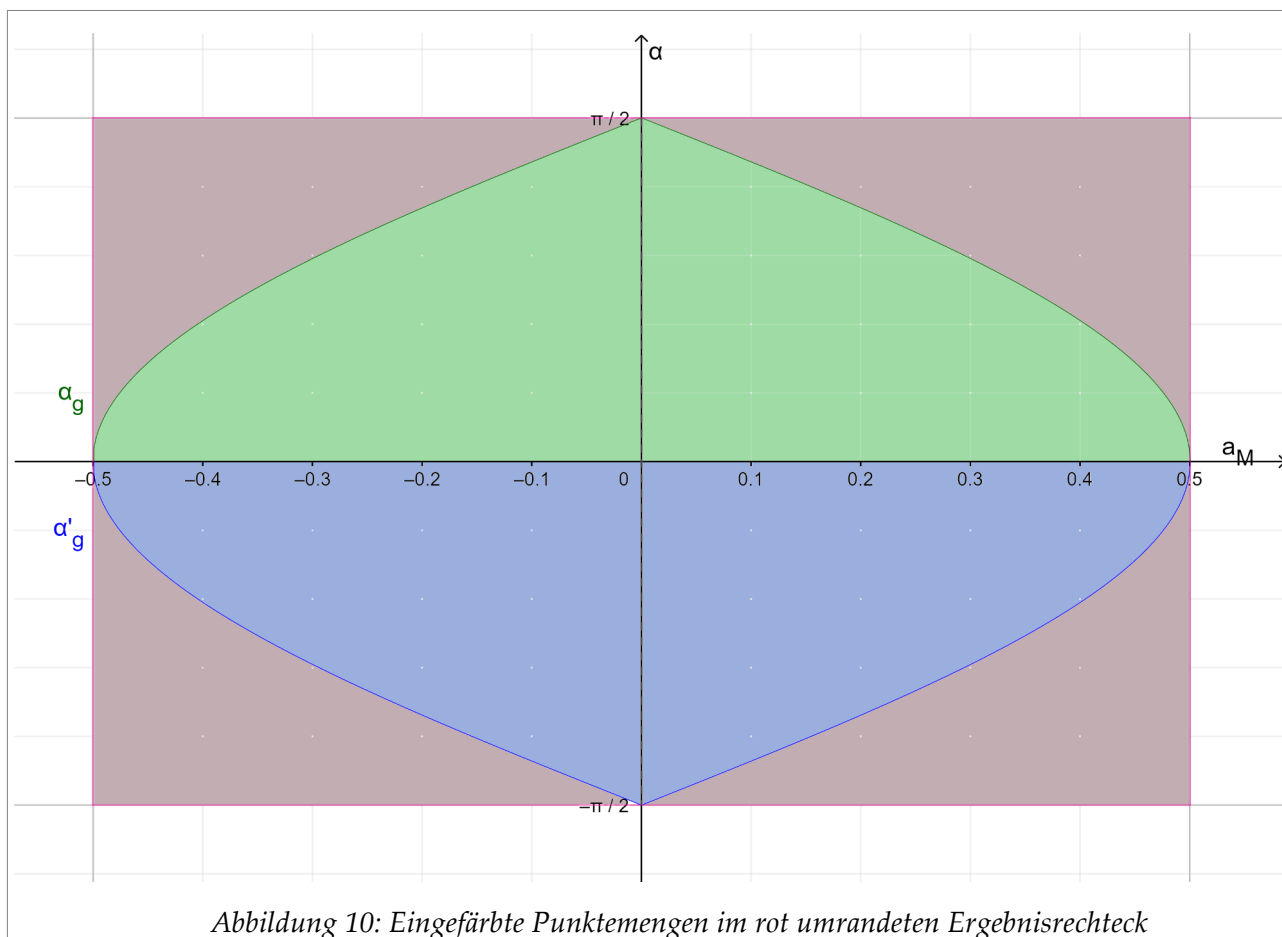
Die Punktmen- gen *mit* Schnittpunkten zwischen Strecken und Ge- rassen sind in der nächsten Abbildung 10 durch einen bläulichen oder einen grünlichen Farbton gekennzeichnet; für deren Lagepa- rameter gilt:

$$\begin{aligned} \text{Mit Schnittpunkt} \\ a_M &\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha_S &\in \left[-\alpha_g, \alpha_g\right] \end{aligned}$$

Die Punktmen- gen *ohne* Schnittpunkte sind durch einen rötlichen Farbton gekennzeichnet; für deren Lageparameter gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ohne Schnittpunkt} \\ a_M &\in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha_S &\notin \left[-\alpha_g, \alpha_g\right] \end{aligned}$$

(3) In den Abbildungen meist einfach α genannt



Wahrscheinlichkeitsmaße sind *geeignete* Volumenmaße, welche den (messbaren) Ergebnisteilmengen des betrachteten Problems zugeordnet werden können.

Eine dieser Mengen wäre die gesamte Ergebnismenge⁴ $\Omega_L = (-1/2, 1/2] \otimes (-\pi/2, \pi/2]$ selbst; diese Menge wird hier repräsentiert durch das rot umrandete Ergebnisrechteck in der obigen Abbildung 10. Aus der Länge (1) und der Breite (π) dieses Rechtecks ergibt sich dessen Flächeninhalt zu $F(\Omega_L) = \pi$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(\Omega_L)$, dass ein Nadelwurf *irgendein* Ergebnis liefert? Da jeder Nadelwurf *mit Sicherheit* ein Ergebnis liefert; beträgt diese Wahrscheinlichkeit 100%.

Um auf den gewünschten *normierten* Wert 1 (für 100%) zu kommen, normieren wir den (Teil-)Flächeninhalt mit dem (Gesamt-)Flächeninhalt π und erhalten somit den gewünschten Wert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w(\Omega_L) = F(\Omega_L)/F(\Omega_L) = 1$.

Es ist in diesem Modell plausibel anzunehmen, dass bei einem Nadelwurf sich die Werte für den Abstand a_M und für den Winkel α_S jeweils *unabhängig* von einander einstellen und dass diese beiden Lageparameter sich ihre Werte aus ihren Definitionsintervallen gleichförmig oder *uniform* entnehmen, jeder einzelne Wert aus den Intervallen soll also sozusagen gleichberechtigt sein.

Sei Ω_T eine echte (messbare⁵) Teilmenge von Ω_L mit dem Flächeninhalt $F(\Omega_T)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w(\Omega_T)$, dass bei einem Nadelwurf Lagen mit einem Parameter-

(4) ... wobei das ‚L‘ für (die Orts- und Winkel-)Lage steht

(5) Das heisst, Ω_T soll zur Borel-Algebra $B(\Omega_L)$ gehören.

wertepaar (a, α) aus Ω_T angenommen werden?

Es ist plausibel anzunehmen, dass diese Wahrscheinlichkeit direkt vom Flächeninhalt der Teilmenge abhängt und wegen der Normierung auf den Gesamtflächeninhalt bezogen werden muss.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Teilmenge, die nur aus einem Wertepaar für die Nadellage besteht, hat den Wert 0, ist also ein Beispiel für ein (fast) unmögliches Ereignis.

Das mag zunächst überraschen, aber, salopp gesprochen, eine einzige Zahl in einem vielfach unendlichen Meer von reellen Zahlen treffen zu wollen, scheint in der Tat ein fast unmögliches Unterfangen zu sein.

Wie sieht es nun mit der Wahrscheinlichkeit aus, dass bei einem Nadelwurf die Nadel auf 2 Dielenbrettern zum Liegen kommt?

Die Teilmenge von Ω_L , die zu dieser Frage korrespondiert, bezeichne ich mit Ω_T , wobei wir die hier relevante Fläche $F(\Omega_T)$ ⁶ bereits eingegrenzt haben: In der obigen Abbildung 10 korrespondieren alle Punkte aus Ω_T , also aus den grün und blau markierten Flächen- und genau nur diese -, zu Nadellagen, in denen die Nadel ein Dielenbrettrand kreuzt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch:

$$\Omega_L = (-1/2, 1/2] \otimes (-\pi/2, \pi/2]$$

$$\Omega_T \subset \Omega_L$$

$$w(\Omega_T) = \frac{F(\Omega_T)}{F(\Omega_L)}$$

$$w(\Omega_L) = 1$$

$$\{(a, \alpha)\} \subset \Omega_L$$

$$F(\{(a, \alpha)\}) = 0$$

$$w(\{(a, \alpha)\}) = 0$$

$$w(\Omega_T) = \frac{F(\Omega_T)}{F(\Omega_L)}$$

Ein Blick auf die obige Abbildung 10 oder auch eine kleine Rechnerei zeigen, dass das rot umrandete Rechteck $F(\Omega_L)$ mit den eingezeichneten Grenzwinkeln und dem bunten Innenleben eine zweifache Spiegelsymmetrie jeweils an einer der beiden Koordinatenachsen aufweist. Genauer: Die beiden Koordinatenachsen teilen das rot umrandete Rechteck $F(\Omega_L)$ in 4 Teilrechtecke, von denen ein jedes durch Spiegelungen an den Achsen in jedes andere überführt werden kann. Somit stimmen die Flächeninhalte der 4 Teilrechtecke so wie die der jeweiligen farbigen Teilflächen der Teilrechtecke überein.

Um die Wahrscheinlichkeit $w(\Omega_T)$ aus den Flächen zu berechnen, kann ich mich daher auf das obere rechte Teilrechteck in der Abbildung 10 beschränken, die zugeordneten Mengen kennzeichne ich durch einen zusätzlichen Index ,4' für $1/4$.

$F(\Omega_{L4})$ ist also die Fläche des *gesamten* Teilrechtecks ,oben rechts', $F(\Omega_{T4})$ ist in diesem Teilrechteck die grün eingefärbte Fläche zwischen der positiven a_M -Koordinatenachse und dem Graphen der Grenzwinkelfunktion $\alpha_g(a_M)$.

Für die Wahrscheinlichkeit eines Wurfes ,über Kreuz' gilt daher:

$$w(\Omega_T) = \frac{F(\Omega_T)}{F(\Omega_L)} = \frac{F(\Omega_{T4})}{F(\Omega_{L4})}$$

$F(\Omega_{L4})$ ist die Rechteckfläche ,Länge mal Breite'.

$$F(\Omega_{L4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Die Fläche $F(\Omega_{T4})$ unterhalb der Grenzwinkelfunktion ergibt sich durch eine Integration über den Arcuscossinus⁷ mit einer bekannten Stammfunktion.

(6) Was im Text wie Ω_T aussieht, sieht in den Formeln so aus: Ω_T , beide Symbole meinen das eine ,über Kreuz'.

$$F(\Omega_{\downarrow 4}) = \int_0^{1/2} \arccos(2|a|) da$$

$$F(\Omega_{\downarrow 4}) = \frac{1}{2} (a \arccos(a) - \sqrt{1-a^2}) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1$$

Die Nadel landet in unserem Modell also zu rund 63,7% auf 2 Dielenbretter.

Die komplementäre Frage, wie wahrscheinlich eine Landung der Nadel auf genau einem Dielenbrett wäre, wird bestimmt durch die zugeordnete komplementäre Menge Ω_{\uparrow} . Die Nadel landet also zu 36,3% auf nur einem Dielenbrett.

$$F(\Omega_{\downarrow 4}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \arccos(a) da$$

$$F(\Omega_{\downarrow 4}) = \frac{1}{2}$$

$$w(\Omega_{\downarrow}) = \frac{F(\Omega_{\downarrow 4})}{F(\Omega_{L4})} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$

$$\Omega_L = \Omega_{\uparrow} \cup \Omega_{\downarrow}$$

$$\Omega_{\uparrow} = \Omega_L \setminus \Omega_{\downarrow}$$

$$w(\Omega_{\uparrow}) = 1 - w(\Omega_{\downarrow}) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$w(\Omega_{\uparrow}) \approx 0,363$$

4.2 Ein Fazit

Meine verwunderte anfängliche Frage, wieso denn nur in der Lösung eines scheinbar kreislosen Problems die Kreiszahl π auftauche, hat eine erste Antwort gefunden: Dem Problem wohnen 2 Freiheitsgrade inne, der eine steht für den Abstand zum nächstgelegenen Dielenrand, der andere bemisst den Drehwinkel aus der Vertikalen und Wahrscheinlichkeitsaussagen zu diesem Drehwinkel beziehen sich letztlich auf Winkelintervalle in Relation zu Intervallen wie $[-\pi/2, \pi/2]$. Dass die wundersame Kreiszahl π hier in einer Wahrscheinlichkeitsaussage auftritt, ist damit unmittelbar einsichtig.

(7) $\arccos(1) = 0$, $\arccos(0) = \pi/2$

4.3 Das virtuelle Experiment mit Python

Die naheliegende Lösung nach den obigen Ausführungen sähe wohl wie folgt aus: Man erzeugt zufällige Werte für die Nadelmitte $P_M=(0,y_M)$ und ebenso zufällige Werte für den Richtungswinkel α_s , berechnet daraus den Grenzwinkel $\alpha_g(y_M)$ und überprüft zuletzt, ob der Richtungswinkel α_s zwischen den Grenzwinkeln α_g und $-\alpha_g$ liegt – genau dann wäre die Nadel auf zwei Dielenbretter gelandet.

Mit diesem Vorgehen würde ich den oben beschriebenen Wahrscheinlichkeitsalgorithmus nachbauen; mein Sinn als Physiker steht aber mehr danach, mehr von der physikalischen Welt in Software nachzubauen, gerade auch mit Bertrands Paradoxon⁸ im Hinterkopf. Ich habe oben die Lage der Nadel als ein *starrer Körper* beschrieben, nämlich durch seinen Schwerpunkt und durch seine Orientierung im Raume, beziehungsweise in der Ebene. In unserem einfach gelagerten Fall reduzierte sich das auf die beiden Parameter y_M für den Schwerpunkt und α_s für die Orientierung.

Aus dem Schwerpunkt $P_M=(0,y_M)$ und dem Orientierungswinkel α_s berechne ich nun allerdings die Strecke, die die Nadel repräsentiert, und zwar mit ihren beiden Endpunkte P_1 und P_2 , und übergebe die Frage, ob sich Gerade und Strecke schneiden, meinem Python-Modul `geometry2d.py`, welches Punkte, Vektoren, Geraden und dergleichen mehr in der Ebene behandelt. Da hier der mögliche Schnittpunkt selbst nicht interessiert sondern nur das Ob, bot es sich zur Beantwortung der Schnittpunktfrage an, einfach die Abstände der Streckenendpunkte zur nächstgelegenen Geraden, genauer die Vorzeichen dieser Abstände, heranzuziehen, denn wenn diese Vorzeichen verschieden sind, dann muss die Strecke die Gerade schneiden.

Mit meinem selbstgestrickten Python-Modul `geometry2d.py` umfasst das auf der nächsten Seite abgebildete Hauptprogramm⁹ nur eine Handvoll Zeilen in Python.

Das Ergebnis der Wurfnadel-Simulation mittels Software ist verträglich mit dem oben algorithmisch berechneten Wert $2/\pi \approx 0,636519$.

(8) Siehe die »Verweise und Literatur« im Anhang

(9) Als Python-Werkzeug verwende ich das famose PyCharm (Community Edition) von JetBrains.

Pi-mit-Dielenbretter.py

```

import random;
from math import sin,cos;
from geometry2d import pi,Points,Vectors,Lines,Segments;

# Dielengerade, hier einfach die x-Achse
floorLine=Lines.toLineWithDir(Points(0,0),Vectors(1,0));

random.seed();

# wurf der Nadel
def needlePitch() -> bool:
    yNdM=random.uniform(0.0,0.5);
    # Zufällige Lage der geworfenen Nadel auf der y-Achse
    # im Intervall (0,½)

    PtNdM=Points(0.0,yNdM);
    # Punkt der Nadelmitte auf der Diele

    alphaNd=random.uniform(0.0,pi/2);
    # Zufällige Orientierung der Nadel auf der Diele
    # im Intervall (0,π/2), gegen die negative y-Achse

    DvNd=Vectors(cos(alphaNd),sin(alphaNd));
    # Richtungsvektor der Nadel auf der Diele

    needle=Segments.toSegmentWithDir(PtNdM,DvNd,1);
    # Erzeugung des Segments (Strecke) aus der Nadelmitte,
    # dem Richtungsvektor und der Länge 1

    return needle.isIntersectionOf_withLine(floorLine);
    # Test, ob die Strecke die Gerade schneidet

# end def needlePitch

#-----#
if __name__=='__main__':
    print('\n# Beginning Pi-mit-Dielenbretter ...\n');

    total=1000000;
    # Anzahl der Würfe
    crossed=0;
    # Nadel überkreuzt die Dielengerade

    for ix in range(1,total+1,1):
        if needlePitch(): crossed+=1;

    result: float=crossed/total;
    # Wahrscheinlichkeit für die Überkreuzung von Strecke und Geraden

    print("crossed      : ",crossed," von ",total);
    print("Result       : ",result);
    print("Result       : ",result*100," %");
    print("|Result-2/pi| : ",abs(result-2.0/pi));

#-----#
    print('\n# Finished Pi-mit-Dielenbretter.\n');
# end if main

```

Die Ausgabe des Python-Programms:

```

# Beginning Pi-mit-Dielenbretter ...
crossed      : 636519 von 1000000
Result       : 0.636519
Result       : 63.6519 %
|Result-2/pi| : 0.000101
# Finished Pi-mit-Dielenbretter.

```

5 Kurze Nadeln

Kurze Nadeln sind solche, deren relative Länge λ kleiner ist als die Breite einer einzelnen Diele, für die also gilt $\lambda < 1$ LE. Die folgende Abbildung 11 zeigt zwei kurze Nadeln mit $\lambda = 0,75$ LE im Abstand $a_M = 0,2$ LE > 0 zum nächstgelegenen Dielenrand (Gerade g_0) in ihren Grenzlagen, in denen jeweils ein Nadelende gerade eben den Dielenrand berührt. Um die Grenzlage zu beschreiben, wähle ich wieder die Grenzwinkel α_g und α'_g .

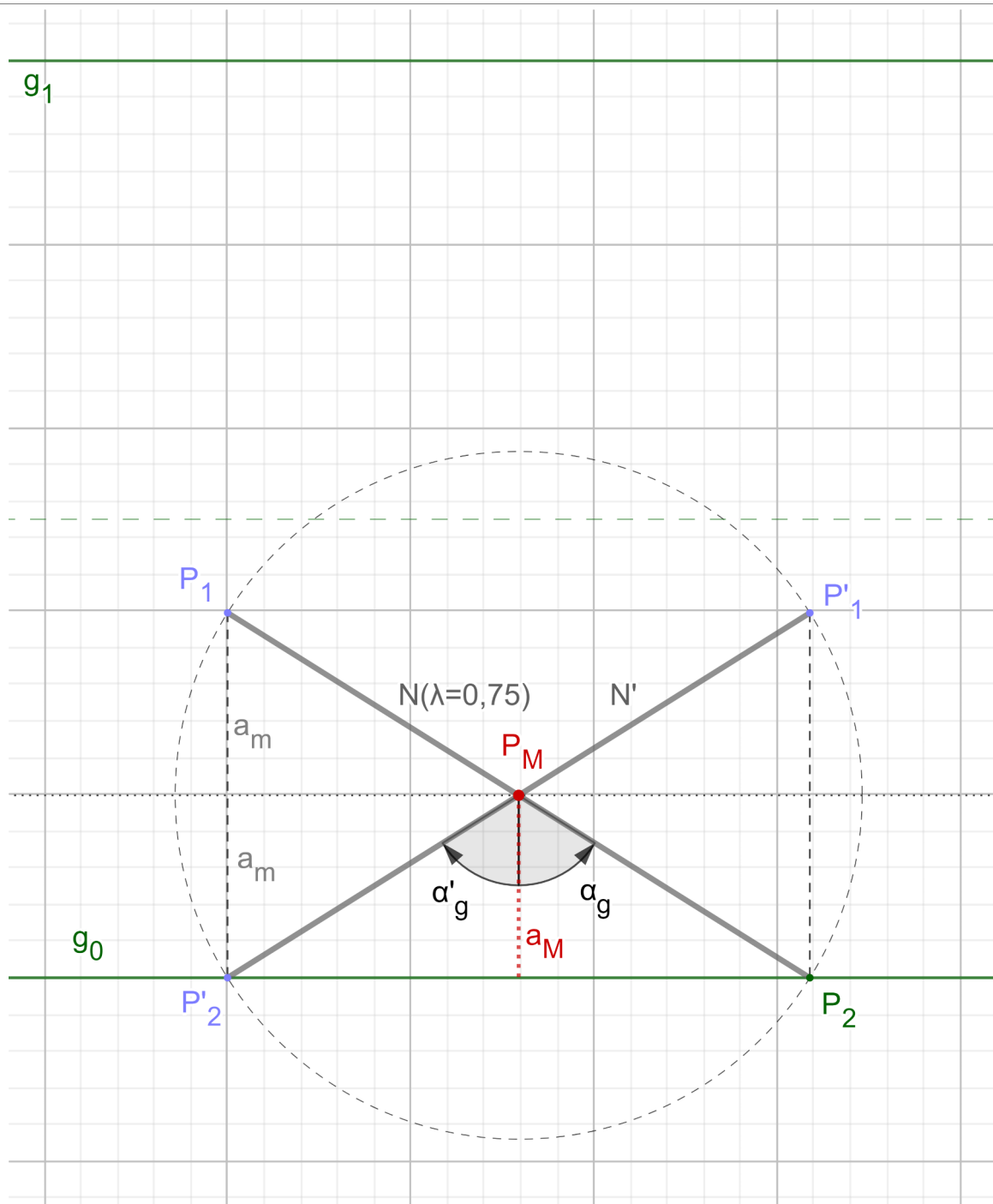


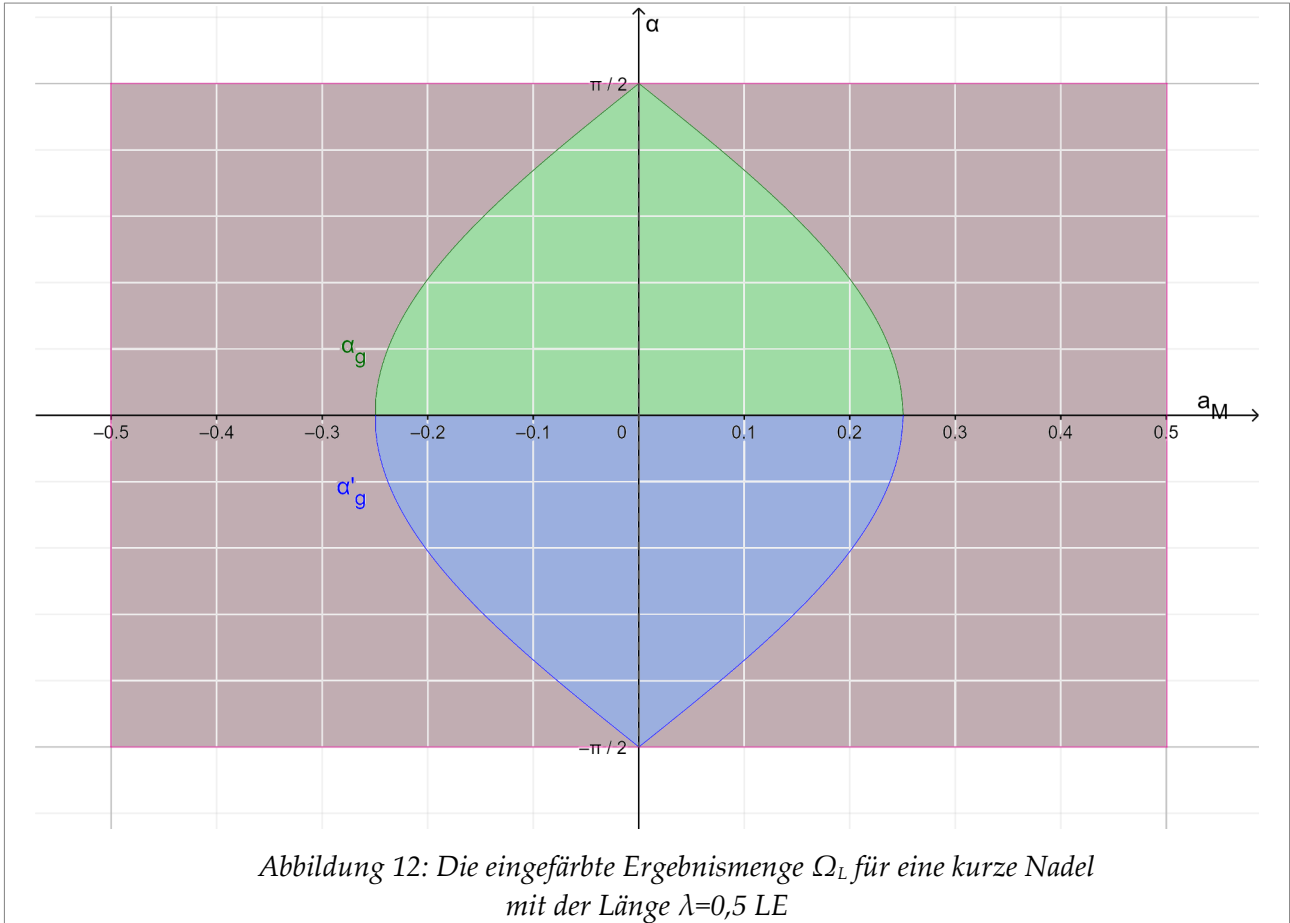
Abbildung 11: Zwei kurze Nadeln mit dem Nadelmittelpunkt P_M , die gerade eben den Dielenrand g_0 (in Grün) berühren

Einfache Geometrie im rechtwinkligen Dreieck legt den Grenzwinkel α_g bei gegebenem Abstand a_M eindeutig fest.

$$\lambda \leq 1 \quad \cos \alpha_g = \frac{2}{\lambda} |a_M| \quad 0 \leq |a_M| < \frac{1}{2} \lambda$$

Die Grenzwinkel α_g und α'_g

$$\alpha_g = \arccos\left(\frac{2}{\lambda} |a_M|\right) \quad \alpha'_g = -\alpha_g$$



Die Wahrscheinlichkeiten für das ‚Schneiden‘ oder das ‚Nicht Schneiden‘ ergeben sich aus dem Verhältnis der jeweiligen eingefärbten Teilflächen zur Gesamtfäche des Ergebnisrechtecks, wobei letztere natürlich – Länge mal Breite! – den Wert π hat. Für die Berechnung der Teilflächen kann ich mich aus Gründen der Spiegelsymmetrie an den beiden Koordinatenachsen auf das rechteckige Teilstück ‚rechts oben‘ in der Ergebnismenge Ω_L in der obigen Abbildung 12 beschränken.

$F_{\uparrow 4}(\lambda)$ steht für das nach oben durch α_g begrenzte, grünlich eingefärbte Flächenstück, das innerhalb der rechteckigen Teilfläche ‚rechts oben‘ liegt; letztere Teilfläche wird $F_4 = \pi/4$ genannt. Nadeln, die diesem grünlichen Flächenstück zugeordnet sind, landen *nicht* innerhalb eines Dielenbrettes, sondern schneiden oder kreuzen den unteren Rand des Dielenbrettes.

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \int_0^{\lambda/2} \alpha_g(a) da$$

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \int_0^{\lambda/2} \arccos\left(\frac{2}{\lambda} a\right) da$$

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \arccos(a) da \quad 10$$

(10) Diese hübsche Umformung mittels einer Partiellen Integration gilt auch, wenn man den arccos durch eine beliebige stetig differenzierbare Funktion f ersetzt.

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \left(a \arccos(a) - \sqrt{1-a^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\lambda}{2} \cdot 1$$

Warum einfach, wenn es auch kompliziert geht?
Hier also der einfachere zweite Weg zur Berechnung der grünlichen Teilfläche $F_{\uparrow 4}(\lambda)$ im Teilrechteck ‚rechts oben‘.

Anstatt wie oben über die Arkuscosinus-Funktion zu gehen und die Fläche unterhalb der inversen Funktion $\alpha_g(a_M)$ zu berechnen, nehme ich den direkten Weg und berechne die Fläche unterhalb der Ausgangsfunktion $a_M(\alpha_g)$. So wird auch unmittelbar ersichtlich, dass für kurze Nadeln die Teilfläche $F_{\uparrow 4}(\lambda)$ schlicht proportional zur Nadellänge λ ist.

Nun zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit:
 $w_{\uparrow}(\lambda)$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel bei einem Wurf auf zwei Dielenbrettern landet und $w_{\parallel}(\lambda)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel innerhalb eines Dielenbrettes landet.

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$a_M(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cos \alpha_g$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad 0 \leq \alpha_g \leq \frac{1}{2}\pi$$

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \int_0^{\pi/2} a_M(\alpha) d\alpha$$

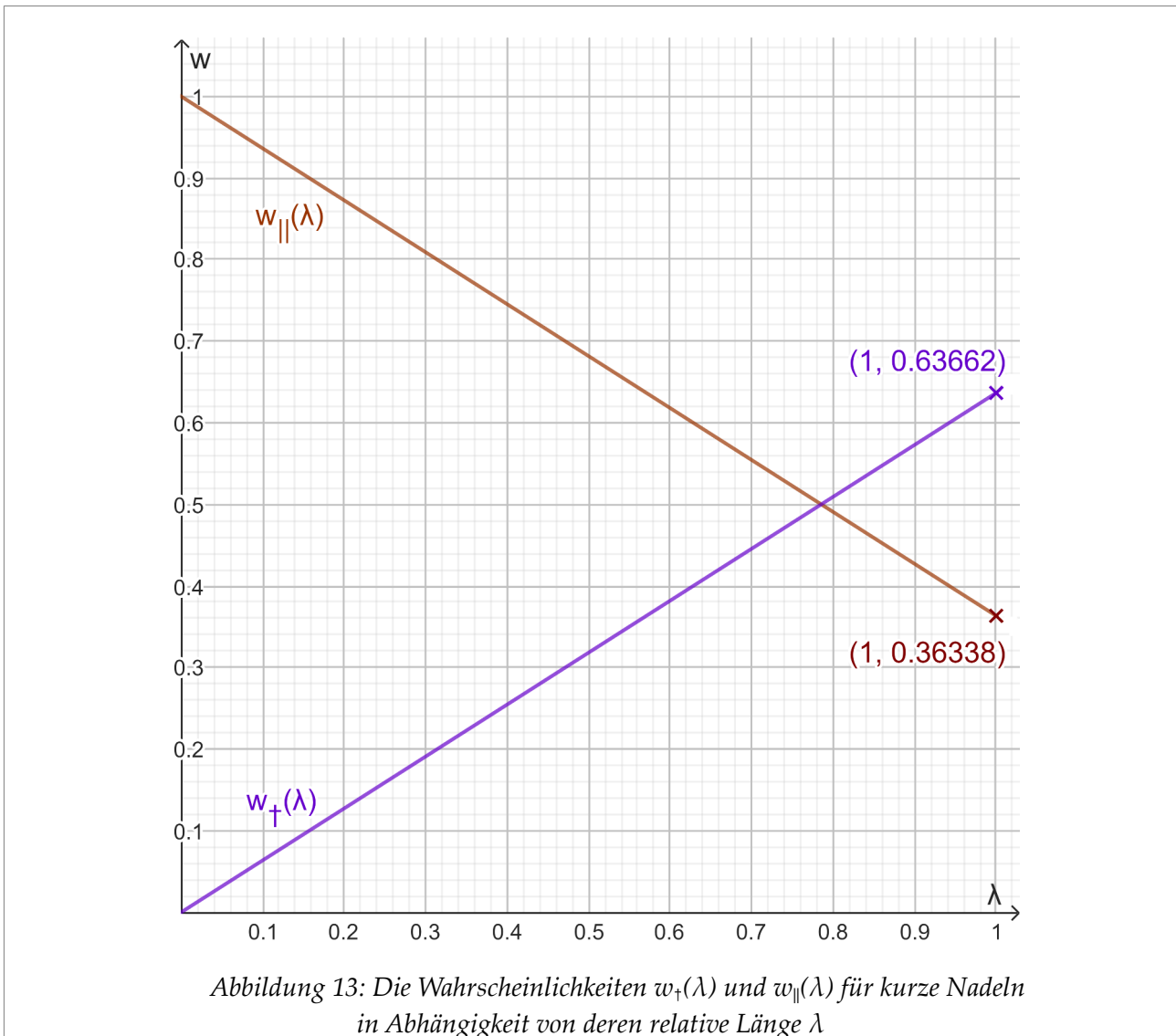
$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha$$

$$F_{\uparrow 4}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \sin(\alpha) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2} \cdot 1$$

$$w_{\uparrow}(\lambda) = \frac{F_{\uparrow 4}(\lambda)}{F_4} = \frac{\lambda/2}{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \lambda$$

$$w_{\parallel}(\lambda) = 1 - w_{\uparrow}(\lambda) = 1 - \frac{2}{\pi} \lambda$$

Die folgende »Abbildung 13«¹¹ zeigt den linearen Verlauf der beiden Wahrscheinlichkeiten $w_{\parallel}(\lambda)$ und $w_{\perp}(\lambda)$ in einem Diagramm.



Der obere Grenzfall kurzer Nadeln ist die Einheitsnadel mit der Länge $\lambda = 1$ LE. Man erhält für diesen Grenzfall die bereits bekannten Ergebnisse aus dem Kapitel »4 Einheitsnadeln«. Für die Länge $\lambda = \pi/4$ sind die beiden Fallvarianten gleichwahrscheinlich. Und klar, für verschwindende λ verschwindet auch die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel auf zwei Dielenbrettern landet.

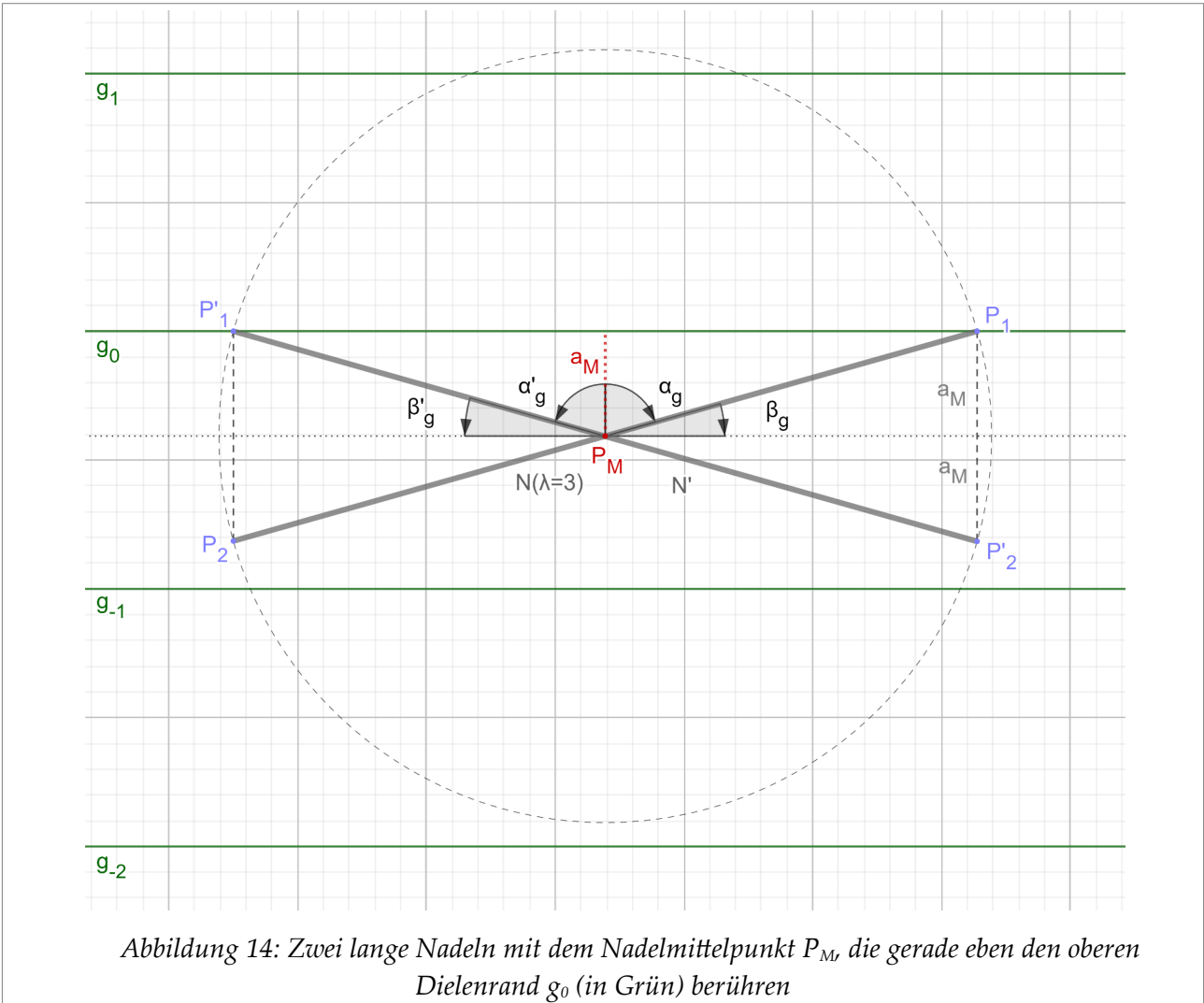
$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &\approx 0,63662 \\ 1 - \frac{2}{\pi} &\approx 0,36338 \\ \frac{\pi}{4} &\approx 0,78540 \\ w_{\perp}(\pi/4) &= w_{\parallel}(\pi/4) = 1/2 \\ w_{\perp}(0) &= 0 \\ w_{\parallel}(0) &= 1 \end{aligned}$$

(11) Das zum Erstellen der Grafik benutzte Werkzeug Geogebra verwendet den Dezimalpunkt als Dezimalktrennzeichen.

6 Lange Nadeln

Lange Nadeln sind solche, deren relative Länge λ größer ist als die Breite (= 1 LE) einer einzelnen Diele; für lange Nadeln gilt also $\lambda > 1$ LE.

Die folgende Abbildung 14 zeigt zwei lange Nadeln im Abstand $a_M < 0$ zum Dielenrand (Gerade g_0) und zwar in ihren Grenzlagen, in denen jeweils ein Nadelende gerade eben den Dielenrand berührt. Um die Grenzlage zu beschreiben, wähle ich hier den zum bisher verwendeten Grenzwinkel α_g den dazu komplementären Winkel β_g .



Einfache Geometrie im rechtwinkligen Dreieck legt den Grenzwinkel β_g bei gegebenem Abstand a_M eindeutig fest.

$$\sin \beta_g = \frac{2}{\lambda} |a_M| \quad 0 \leq |a_M| \leq \frac{1}{2} \quad \lambda \geq 1$$

Die komplementären Grenzwinkel β_g und β'_g

$$\beta_g = \arcsin\left(\frac{2}{\lambda} |a_M|\right) \quad \beta'_g = -\beta_g$$

In der nächsten »Abbildung 15« trennen die beiden Grenzwinkel in der rechteckigen Ergebnismenge $\Omega_L = (-1/2, 1/2] \otimes (-\pi/2, \pi/2]$ diejenigen Bereiche voneinander, in denen eine Nadel mit den Lageparameter (a_M, β_g) den Dielenrand schneidet oder nicht schneidet. Diese Bereiche sind entsprechend unterschiedlich eingefärbt, wobei der rötliche Farbton für ‚Schneiden‘ und der grünliche oder bläuliche für ‚Nicht Schneiden‘ steht.

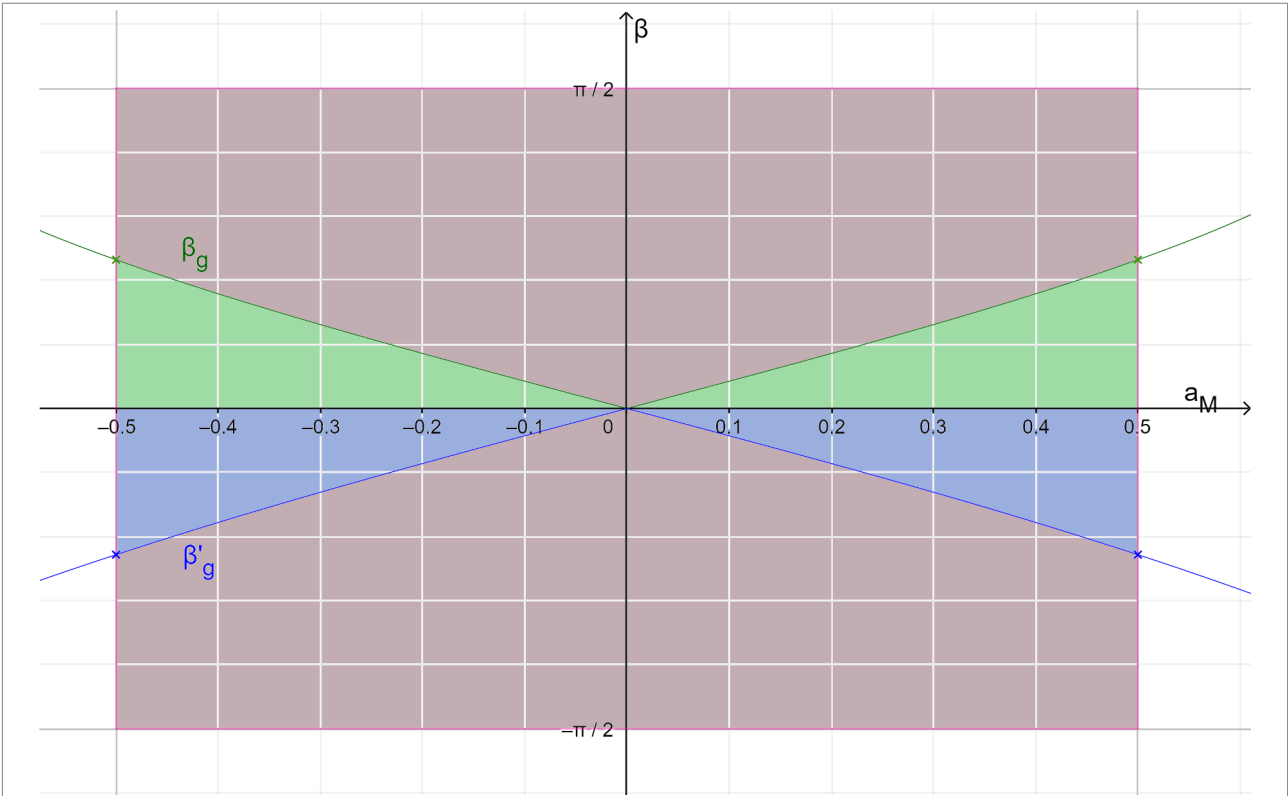


Abbildung 15: Die eingefärbte Ergebnismenge Ω_L für eine lange Nadel mit der Länge $\lambda=1,5$ LE

Die Wahrscheinlichkeiten für das ‚Schneiden‘ oder das ‚Nicht Schneiden‘ ergeben sich dann leichter Hand aus dem Verhältnis der jeweiligen eingefärbten Teilflächen zur Gesamtfläche des Ergebnisrechtecks, wobei letzteres den Wert π hat. Für die Berechnung der Teilflächen kann ich mich aus Gründen der Spiegelsymmetrie an den beiden Koordinatenachsen auf die rechteckige Teilfläche ‚rechts oben‘ in der Ergebnismenge Ω_L beschränken.

$F_{14}(\lambda)$ ist die grünlich eingefärbte Fläche innerhalb dieser rechteckigen Teilfläche ‚rechts oben‘; Nadeln, die dieser grünlichen Fläche zugeordnet sind, landen innerhalb eines Dielenbrettes.

$F_4 = \pi/4$ steht für die Fläche der rechteckigen Teilfläche ‚rechts oben‘. $w_{11}(\lambda)$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel bei einem Wurf innerhalb eines Dielen-

$$F_{14}(\lambda) = \int_0^{1/2} \beta_g(a) da = \int_0^{1/2} \arcsin\left(\frac{2}{\lambda} a\right) da$$

$$F_{14}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\lambda} \arcsin(a) da$$

$$F_{14}(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sqrt{(\lambda^2 - 1)} - \lambda \right\}$$

$$w_1(\lambda) = \frac{F_{14}(\lambda)}{F_4} \quad \lambda \geq 1$$

$$w_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sqrt{(\lambda^2 - 1)} - \lambda \right\}$$

brettes landet und $w_{\neq}(\lambda)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel auf zwei Dielenbrettern landet.

$$w_{\neq}(\lambda) = 1 - w_{=}(\lambda)$$

Für große Nadellängen λ geht die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel innerhalb eines einzigen Dielenbrettes zum Liegen kommt, asymptotisch gegen Null. Sehr lange Nadeln landen also vorzugsweise auf mehreren Dielenbrettern, wie es anschaulich auch einsichtig ist.

$$w_{=}(\lambda) = \frac{1}{\pi \cdot \lambda} + o(\lambda^{-3}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty$$

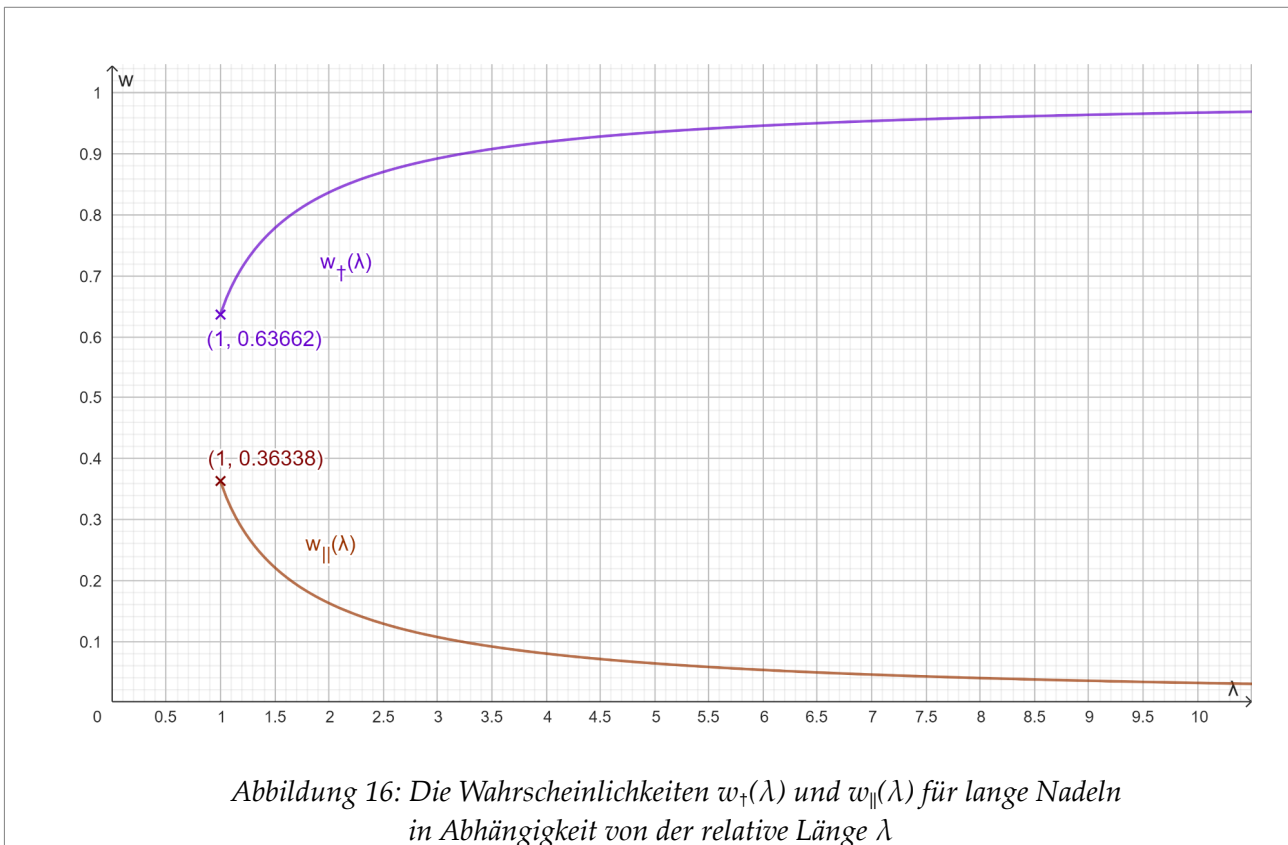
Der untere Grenzfall langer Nadeln ist die Einheitsnadel. Mit $\arcsin(1) = \pi/2$ erhält man die bereits bekannten Ergebnisse aus dem Kapitel »4 Einheitsnadeln«.

$$w_{\neq}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\pi \cdot \lambda} - o(\lambda^{-3}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty$$

$$w_{=}(\lambda) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$w_{\neq}(\lambda) = 1 - w_{=}(\lambda) = \frac{2}{\pi}$$

Die folgende Abbildung 16¹² zeigt den Verlauf der beiden Wahrscheinlichkeiten $w_{=}(\lambda)$ und $w_{\neq}(\lambda)$ in einem Diagramm.



(12) Das zum Erstellen der Grafik benutzte Werkzeug Geogebra verwendet den Dezimalpunkt als Dezimaltrennzeichen.

Anhang

A. Simple Integrationen mit SciLab

Auch offensichtlich einfache Umformungen können ihre Tücken entfalten, wenn dem Umformer über die Jahre die vormals alltägliche Übung abhanden gekommen ist. Deshalb hatte ich SciLab bemüht, um mich von der Richtigkeit von einigen Umformungen zu vergewissern :-)

$$P_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} \arccos(2|\bar{a}|) d\bar{a} \quad P_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arccos(|\bar{a}|) d\bar{a} \quad P_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+1} \arccos(\bar{a}) d\bar{a}$$

```
funcprot(0)
function y=P_1(x),y=(2/%pi)*acos(abs(2*x)),endfunction
I1=intg(-1/2,+1/2,P_1)
disp("P_1:",I1)

function y=P_2(x),y=(1/%pi)*acos(abs(x)),endfunction
I2=intg(-1,+1,P_2)
disp("P_2:",I2)

function y=P_3(x),y=(2/%pi)*acos(x),endfunction
I3=intg(0,+1,P_3)
disp("P_3:",I3)

disp("2/%pi:",2/%pi)
```

Es wäre denn doch eine Überraschung gewesen, wenn die Werte für die 3 oben stehenden Integrale P_k ($k=1,2,3$) nicht übereinstimmen würden:

```
exec('C:\Users\...\integrate_arccos.sce', -1)
Auf 7 Nachkommastellen gerundet ergeben sich die 3 nebenstehenden Ergebnisse:
```

"P_1:"	0.6366198
"P_2:"	0.6366198
"P_3:"	0.6366198
"2/π:"	0.6366198

B. Das Paradoxon von Bertrand

Modelle sollen oft ein Teil der realen Welt, diese vereinfachend, so abbilden, dass sie der Lösung eines gestellten Problems dienen können. Die Angemessenheit des Modells und die Qualität der damit gefundenen Lösung bedürfen in der Regel einer Überprüfung, etwa durch einen direkten Vergleich dieser Lösung mit einem Experiment in und an der realen Welt.

Einen Warnhinweis, nach einer Problemlösung nicht voreilig auf die Angemessenheit des Modells zu schließen, gibt das sogenannte Paradoxon von Bertrand - das allerdings in eigentlichen Sinne gar kein solches ist. Denn hier beim Bertrandschen Problem ist es *„nur“* eine etwas schludrige weil letztlich unvollständige Problemstellung:

„Wir betrachten einen Kreis und ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck. Eine Kreissehne wird zufällig ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als die Seiten des Dreiecks?“ [Wiki-Bert]

Zufällig ausgewählt? Auf welche Weise ausgewählt!

Eine solche Kreissehne lässt sich, wie Joseph Bertrand gezeigt hat, auf verschiedene Verfahrensweisen auswählen und jede dieser Verfahrensweisen ist mit einem eigenen Wahrscheinlichkeitsraum verknüpft, sodass in ganz natürlicher, ganz unparadoxe Weise 3 Arten der Konstruktion von Kreissehnen zu 3 unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für das eine gestellte Problem führen.

Die in der Problemstellung nachgefragte Wahrscheinlichkeit für die Länge einer willkürlich mit Zirkel und Lineal eingezeichneten Kreissehne ist also keine dem geometrischen Objekt Kreissehne innewohnende Eigenschaft, sondern sie hängt ab von deren Entstehungsgeschichte, hängt davon ab, auf welche Weise die Kreissehne konstruiert wurde.

C. Weitergehende Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen

Wahrscheinlichkeitsmaße lassen sich auf Teilmengen wie dem unten stehenden kartesischen Produkt Ω_L aus einem Orts- und einem Winkelintervall einfach über eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, hier $p_{a\alpha}$ genannt, definieren. $a=a_M$ und $\alpha=\alpha_S$ sind die Lageparameter der als Strecke modellierten Wurfnadel. Jedes Wertepaar $(a,\alpha) \in \Omega_L$ stellt ein mögliches *Ergebnis* eines Wurfes dar; Ω_L ist die hier relevante Menge aller möglichen *Ergebnisse* unseres Problems.

$$\Omega_L \subset \mathbb{R}^2 \quad \Omega_L = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{2} \pi] \quad \Omega_L = \{(a, \alpha) | a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \alpha \in [-\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{2} \pi]\}$$

Die *Ereignismenge* $B(\Omega_L)$ des Problems ist die Menge aller Teilmengen von Ω_L , vermindert um diejenigen Teilmengen, denen sich kein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß zuordnen lässt. Zudem wird die Ereignismenge angereichert um einige algebraische Strukturen; für Einzelheiten möge der Leser die allwissende Wikipedia heran ziehen. Teilmengen dieser *Ereignismenge* lassen sich Wahrscheinlichkeitsmaße zuordnen.

Beim Wurf einer Nadel sollen sich die beiden Werte für deren Lage a und α unabhängig voneinander einstellen – soll heißen, die beiden Werte sind nicht korreliert; zu einem gegebenem Wert a soll sich *jeder* mögliche Wert für α_S einstellen können und umgekehrt.

Unter dieser plausiblen Annahme faktorisiert die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_{a\alpha}$ in 2 Einzelfaktoren p_a und p_α .

$$p_{a\alpha}(a, \alpha) = p_a(a) \cdot p_\alpha(\alpha)$$

Einer (messbaren) Teilmenge ω aus der Ereignismenge $B(\Omega_L)$ lässt sich dann eine normierte Wahrscheinlichkeit $w(\omega)$ zwischen 0 und 1 zuordnen, nämlich mittels eines Integrals¹³ über der Dichtefunktion $p_{a\alpha}$.

$$\omega \subset B(\Omega_L)$$

$$w(\omega) = \int_{\omega} p_a(a) p_\alpha(\alpha) da d\alpha$$

$$w(\Omega_L) = 1$$

Für die Dichtefunktion $p_a(a)$ der räumlichen Lagekoordinate a fordere ich eine sogenannte stetige Gleichverteilung über dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, dass heißt, $p_a(a)$ wird als konstant mit dem Wert 1 über dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ angenommen. Außerhalb des Intervalls $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ wird p_a mit dem Wert 0 fortgesetzt gedacht.

Stetige Gleichverteilung für a

$$p_a(a) = 1 \quad \forall a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$p_a(a) = 0 \quad \forall a \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Die Wahrscheinlichkeit $w_a([a_1, a_2])$, dass bei einem Wurf *irgendein* Wert a aus $[a_1, a_2]$ eingenommen wird, ergibt sich als Integral der Dichtefunktion p_a über das Intervall $[a_1, a_2]$. Diese Wahrscheinlich ist proportional zur Länge Δ_a mit dem Normierungsfaktor 1.

$$[a_1, a_2] \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset B(\Omega_L)$$

$$\Delta_a = a_2 - a_1 \geq 0$$

$$w_a([a_1, a_2]) = \int_{a_1}^{a_2} p_a da = \Delta_a$$

Die Wahrscheinlich, dass ein vorgegebenes Ereignis

$$w_a([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = 1$$

(13)Im Allgemeinen wäre das das Lebesque-Integral, hier tut es auch das klassische, enger gefasste Riemann-Integral.

$\{a\} \subset B(\Omega_L)$ eintritt, hat den Wert 0.

$$w_a(\{a\}) = w_a([a, a]) = 0$$

$\{a\}$ sei ein ‚fast unmögliches‘ Ereignis sagt man dazu, eingeschränkt auf fast unmöglich, denn es ist nichtsdestotrotz ein real mögliches Ereignis – irgendwo muss die Nadel schließlich auf der Diele landen, und da wäre auch das Ergebnis a möglich.

Für die Dichtefunktion $p_\alpha(\alpha)$ der Winkelkoordinate α fordere ich wiederum eine stetige Gleichverteilung über dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$, das heißt, $p_\alpha(\alpha)$ wird als konstant mit dem Wert $1/\pi$ über $[-\pi/2, \pi/2]$ angenommen. Außerhalb dieses Intervalls wird $p_\alpha(\alpha)$ mit dem Wert 0 fortgesetzt gedacht.

Stetige Gleichverteilung für α_s

$$p_\alpha(\alpha) = 1/\pi \quad \forall \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$p_\alpha(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin [-\pi/2, \pi/2]$$

Die Wahrscheinlichkeit $w_\alpha([\alpha_1, \alpha_2])$, dass bei einem Wurf irgendein Wert α aus dem Winkelintervall $[\alpha_1, \alpha_2]$ eingenommen wird, ergibt sich als Integral der Dichtefunktion p_α über $[\alpha_1, \alpha_2]$. Diese Wahrscheinlich ist proportional zur Länge Δ_α des Winkelintervalls mit dem Normierungsfaktor $1/\pi$.

$$[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \geq 0$$

$$w_\alpha([\alpha_2, \alpha_1]) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_\alpha d\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\pi}$$

$$w_\alpha([-\pi/2, \pi/2]) = 1$$

$$w_\alpha(\{a\}) = w_\alpha([a, a]) = 0$$

In einem Zufallsexperiment sei der räumliche Lageparameter der Nadel auf einen festen Wert a fixiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem solchen Wurf der Winkelparameter α zwischen den Grenzwinkeln $-\alpha_g$ und $+\alpha_g$ liegt - die Nadel also die nächstgelegene Gerade schneidet -, ist dann gegeben durch:

$$w_\alpha([-\alpha_g(a), \alpha_g(a)]) = \int_{-\alpha_g(a)}^{\alpha_g(a)} p_\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \alpha_g(a) = \frac{2}{\pi} \arccos(2|a|) \quad \text{mit } a \in (-1/2, 1/2)$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit w_\dagger , dass die Nadel bei irgendeinem Wurf die nächstgelegene Gerade schneidet, erhält man durch eine weitere Integration über alle möglichen Abstände:

$$w_\dagger = \int_{-1/2}^{+1/2} p_a \cdot \left\{ \int_{-\alpha_g(a)}^{\alpha_g(a)} p_\alpha d\alpha \right\} da$$

$$w_\dagger = \frac{2}{\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} p_a \cdot \arccos(2|a|) da$$

$$w_\dagger = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \arccos(|a|) da$$

$$w_\dagger = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \arccos(a) da$$

$$w_\dagger = \frac{2}{\pi} \left(a \arccos(a) - \sqrt{1-a^2} \right) \Big|_0^1$$

$$w_\dagger = \frac{2}{\pi} \approx 0,637 \hat{=} 63,7\%$$

D. Auswertungen der Wurfsimulation mit Calc

Der Titel dieses Anhangs ist der Kürze geschuldet: Die Simulation der Würfe habe ich mit Python bewerkstelligt, für eine zusätzliche und ganz schnelle Auswertung bevorzuge ich aber LibreOffice Calc.

Als ich bei der Wurfsimulation mit der Anzahl der Würfe herum spielte, wurde meine Geduld sehr schnell strapaziert, und zwar nur deshalb weil ich eine weitere Null an die Anzahl der Würfe hinten dran gehängt hatte, ohne dass das berechnete Ergebnis einen adäquaten Fortschritt hinsichtlich der gewünschten Konvergenz gemacht hätte.

Um Licht in das Konvergenzverhalten zu bringen, habe ich die Anzahl der Würfe N_W in Schritten jeweils verzehnfacht und so mit den 5 Wurfzahlen $2 \cdot 10^5$, $2 \cdot 10^6$, $2 \cdot 10^7$, $2 \cdot 10^8$ und $2 \cdot 10^9$ je $n=5$ Ergebnisse der Simulation berechnen lassen. Fünf Ergebnisse für jede Wurfzahl N sind nicht viel, aber immerhin, denn die Rechenzeit nahm ziemlich rasant zu.

Die 'Stichproben', die jetzt per Simulation durchgeführt werden, sehen wie folgt aus: Für jedes der obigen N_W (Gesamtanzahl der Würfe) werden 5 Messungen, sprich 5 Rechnerläufe, durchgeführt; in jedem Lauf wird dabei schlicht gezählt, wie oft bei den jeweils insgesamt N_W Würfeln die Nadel einen Dielenrand schneidet; diese Anzahl wird N_S genannt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dielenrand geschnitten wird, ist dann einfach gegeben durch den Quotienten $w_S = N_S / N_W$. Für jede Wurfzahl N_W ergeben sich somit $n=5$ solcher Messergebnisse $w_{S,k}$ mit dem Laufindex $k=1, \dots, 5$. Um die Stichproben für die verschiedenen Wurfzahlen N_W vergleichen zu können, ziehe ich als Streumaß die Empirischen Standardabweichungen der Stichproben σ_{NW} heran.

Der *Empirische Mittelwert* \bar{w}_n einer Stichprobe aus n Messwerten $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist definiert durch:

$$\bar{w}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k$$

Die *Empirische Varianz* σ_n^2 der Stichprobe ist definiert durch:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (w_k - \bar{w}_n)^2$$

Die *Empirische Standardabweichung* σ_n der Stichprobe (in LibreOffice Calc STABW.S genannt, das ".S" steht für 'Stichprobe') ist definiert durch die Quadratwurzel aus der Empirischen Varianz:

$$\sigma_n = \sqrt{\left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (w_k - \bar{w}_n)^2 \right]}$$

Diese Standardabweichung ist eine Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert der Stichprobe, denn sie bestimmt die Breite der Verteilungskurve der Messwerte um eben diesen Mittelwert. Weiteres hierzu findet sich in der allwissenden Wikipedia.

Im folgenden Diagramm »Abbildung 17« sind die Zehnerlogarithmen der 5 Standardabweichungen $\log_{10}(\sigma_{NW})$ gegen die Zehnerlogarithmen der Wurfzahlen $\log_{10}(N_W)$ abgetragen. LibreOffice Calc hat diese 5 Punkte durch eine 'optimale' Gerade approximiert und die Geradengleichung „f(x)“ dieser Trendlinie ausgegeben.

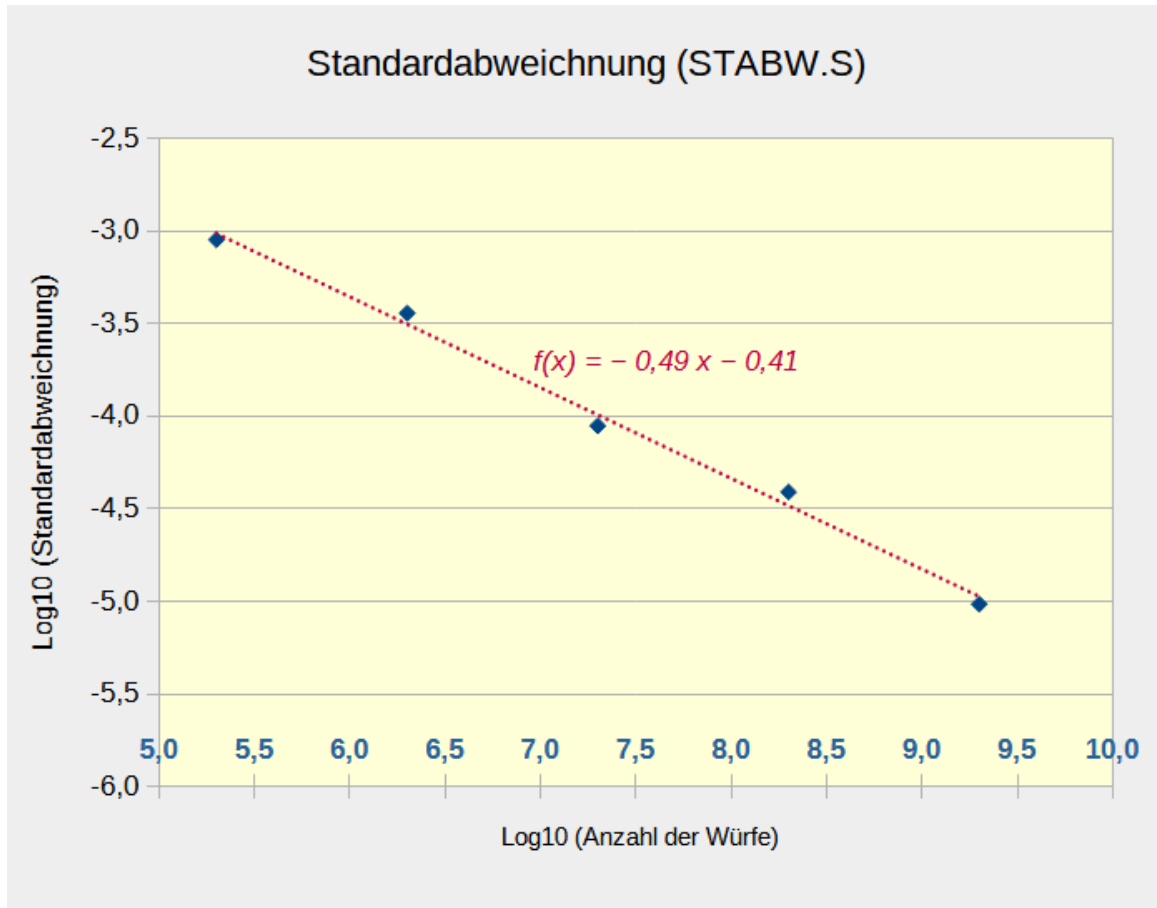


Abbildung 17: Trendlinie für die Standardabweichungen

Wie sieht nun der 'Trend' der Standardabweichungen bei einer wachsenden Zahl von Würfeln (N_W) aus?

$$f(N_W) = a \log_{10}(N_W) + b$$

$$a = -0,49 \approx -\frac{1}{2} \quad b = -0,41$$

$$f(N_W) = \log_{10}(N_W^a) + \log_{10}(10^b)$$

$$f(N_W) = \log_{10}(N_W^a \cdot 10^b)$$

$$\log_{10}(\sigma_{NW}) \approx f(N_W) = \log_{10}(N_W^a \cdot 10^b)$$

$$\sigma_{NW} \approx 10^b \cdot N_W^a \quad 10^b \approx 0,39$$

Die Streuung der Ergebnisse um den Mittelwert geht mit wachsendem N_W *langsam* der Wurzel wegen gegen Null - was allerdings auch zu erwarten¹⁴ war.

$$\sigma_{NW} \approx \frac{0,39}{\sqrt{N_W}}$$

Die Breite der Verteilungskurve wird also mit wachsendem N_W zwar schmaler und schmaler, allerdings mit einem stark gedämpften Tempo. Denn wenn die Anzahl der Würfe um den Faktor 10 erhöht wird, wird die Kurve nur um gut den Faktor 0,3 schmaler. Locker auf die Anzahl der gültigen Dezimalstellen meines Endergebnisses

(14) Der Zentrale Grenzwertsatz der Stochastik kommt mit solch einem Faktor $1/\sqrt{n}$ daher.

übertragen, heißt das, dass ich die Anzahl der Würfe gut um den Faktor 100 erhöhen muss, will ich eine weitere gültige Dezimalstelle im Ergebnis gewinnen.

Der oben per Algorithmus berechnete Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Nadel einen Dielenrand kreuzt, war $w_{\dagger} = 2/\pi$. Dieser Wert $2/\pi$ ist damit der wahre, der ‚erwartete‘ Wert für mein in Python-Code gegossenes Experiment zur Ermittlung eben genau dieses Wertes. Das folgende Diagramm »Abbildung 18« zeigt, dass die 25 mit Python für 5 verschiedene Wurfzahlen N_W ermittelten Werte $w(k)$, $k=1,2,\dots,25$, mit wachsendem N_W immer weniger von dem wahren Wert $2/\pi$ abweichen.

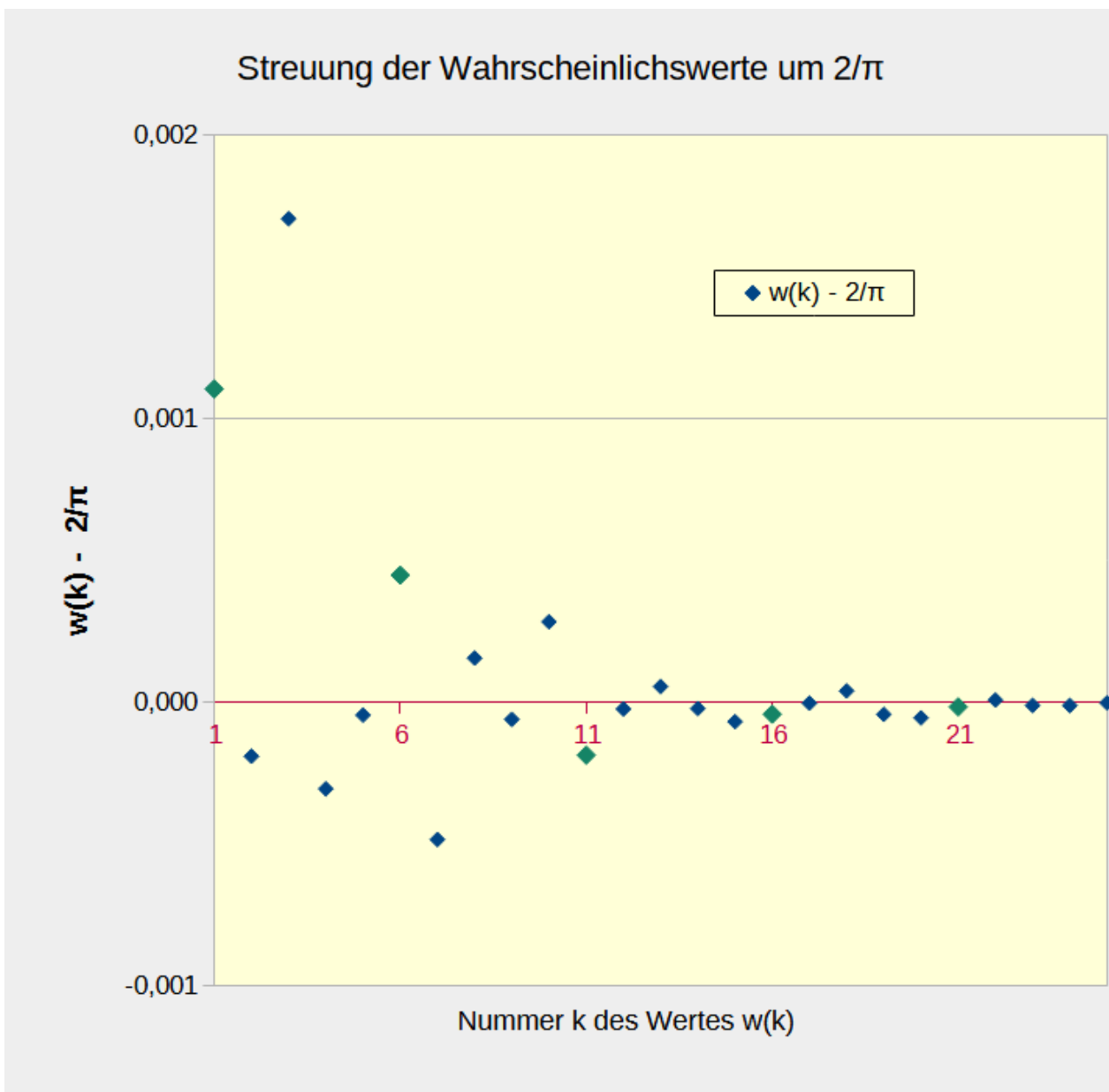


Abbildung 18: Streuung der Wahrscheinlichswerte um $2/\pi$

Die 5 grünen Rhomben mit den k -Werten 1,6,11,16 und 21 markieren jeweils den ersten Wert der 5 Datensätze für die Wurfzahlen $2 \cdot 10^5$, $2 \cdot 10^6$, $2 \cdot 10^7$, $2 \cdot 10^8$ und $2 \cdot 10^9$.

Verweise und Literatur

<i>Bernd Ragutt</i> : Formeln zur ebenen Geometrie	simpleGeo.pdf	(Siehe meine Webseite zum Thema)
<i>Bernd Ragutt</i> : Einfache ebene Geometrie – Implementierung in Python	geometry2d.py.pdf	(Siehe meine Webseite zum Thema)
<i>Wikipedia</i> : Das Buffonsches Nadelproblem	https://de.wikipedia.org/wiki/Buffonsches_Nadelproblem	
<i>Wikipedia</i> : Das Bertrand-Paradoxon (Wahrscheinlichkeitstheorie)	https://de.wikipedia.org/wiki/Bertrand-Paradoxon_%28Wahrscheinlichkeitstheorie%29	
<i>Martin Aigner, Günter M. Ziegler</i> Das Buch der Beweise	https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-57767-7?page=3#toc	
<i>Prof. Dr. Edmund Weitz</i> Das Nadelproblem von Buffon <i>in</i> : Mathematische Eleganz hoch drei (Weihnachtvideo 2021)	https://www.youtube.com/watch?v=YIkqZ-sz4faA&list=PLb0zKSynM2PAuxxtMK1bxYPV_bUoPtpTB&index=3&t=262s	