Bernd Ragutt

Formeln zur zweidimensionalen Geometrie

Inhaltsverzeichnis

Vektoren

Ein Vektor **v**, eingebettet in einem zwedimensionalen Raum, beschreibt ein mathematisches Objekt mit einer Länge v=|**v**| und einer Richtung; dargestellt wird ein Vektor durch einen Pfeil der Länge v, der in die gewünschte Richtung zeigt. Alle Vektoren derselben Länge und derselben Richtung werden als gleich angesehen, auch wenn sie an verschiedenen Stellen des Raumes angeheftet scheinen.

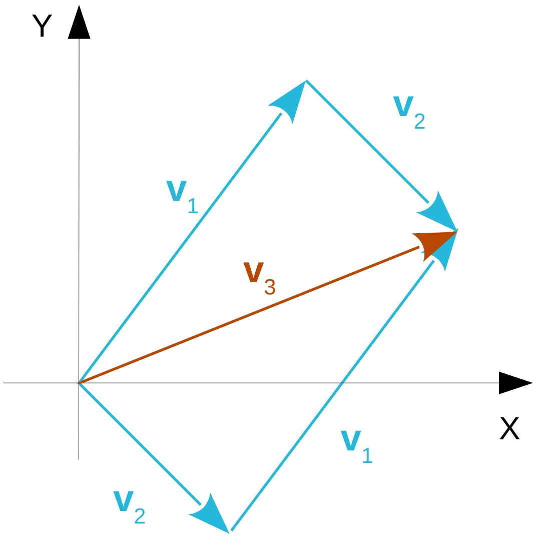
Der Nullvektor ist der Vektor mit der Länge null; seine Richtung ist nicht definiert.

Der Einheitsvektor in Richtung **v** wird mit einem Dach gekennzeichnet: $\hat{\boldsymbol{v}} \quad mit \quad |\hat{\boldsymbol{v}}| = 1$.

Zwei Vektoren mit derselben Richtung heißen parallel.

Skalare Multiplikation für einen Vektor Ein Vektor $\mathbf{v}_1$ lässt sich mit einer Zahl c multiplizieren; der Ergebnisvektor $\mathbf{v}_2$ hat dieselbe Richtung wie der Ausgangsvektor aber die c-fache Länge.	$\boldsymbol{v}_2 = c\ \boldsymbol{v}_1$ $\hat{\boldsymbol{v}}_2 = \hat{\boldsymbol{v}}_1$ $\lvert\boldsymbol{v}_2\rvert = c\ \lvert\boldsymbol{v}_1\rvert$

Vektoraddition für zwei Vektoren



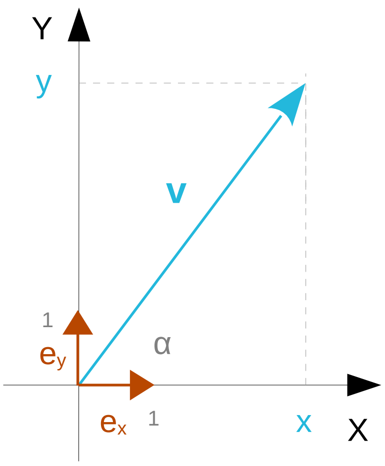
Zwei Vektoren lassen sich zum einem dritten addieren:

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$$

Die Addition wird nach der Parallelogramm-Regel ausgeführt: Der Ergebnisvektor beginnt am Pfeilende des ersten Vektor und endet an der Pfeilspitze des zweiten.

Die Reihenfolge, in der die Operation durchgeführt wird, spielt keine Rolle.

Koordinaten eines Vektors



Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$; beide sind keine Nullvektoren und sie sind nicht parallel. Man nennt sie mit diesen Eigenschaften linear-unabhängig.

Dann lässt sich jeder Vektor **v** als Kombination der beiden Vektoren schreiben:

$$\boldsymbol{v} = b_1\ \boldsymbol{b}_1 + b_2\ \boldsymbol{b}_2$$

mit eindeutigen reellen Koeffizienten b_1 und b_2.

Die beiden Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$, nennt man Basisvektoren, sie bilden eine Basis für Vektoren.

Besonders einfach gestaltet sich das Rechnen mit Vektoren, wenn man zwei Einheitsvektoren wählt, die senkrecht aufeinander stehen.

Der eine Basisvektor $\mathbf{e}_x$ zeige in die positive Richtung der x-Achse, der andere $\mathbf{e}_y$ in die positive Richtung der y-Achse.

Ein Vektor **v** hat dann die eindeutige Zerlegung:

$$\boldsymbol{v} = x\ \boldsymbol{e}_x + y\ \boldsymbol{e}_y \quad mit \quad |\boldsymbol{e}_x| = 1 , |\boldsymbol{e}_y| = 1$$

Die Zahlen x und y nennt man die kartesischen Koordinaten des Vektors bezogen auf die gewählte Basis $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$.

Die Länge des Vektors, ausgedrückt mit den Koordinaten, ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras zu:

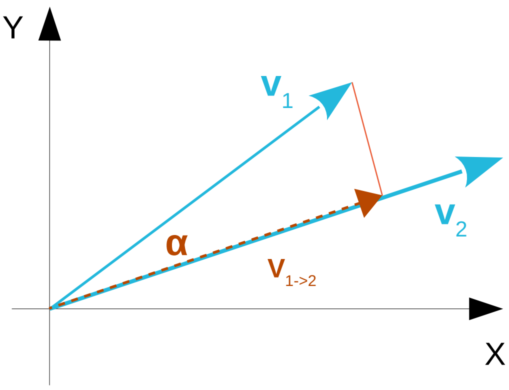
$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Richtung des Vektors kann auch durch den Winkel α beschreiben werden; er ist gegen die x-Achse definiert und wächst entgegen dem Uhrzeigersinn.	$\alpha = atan2(y, x) \quad mit \quad -\pi < \alpha \leqslant \pi$
	atan2 ist die Vierer-Quadrantform der inversen Tangensfunktion:
	`atan2( 1, 1) = + 45°; atan2( 1,-1) = +135°`
	`atan2(-1,-1) = -135°; atan2(-1, 1) = - 45°`

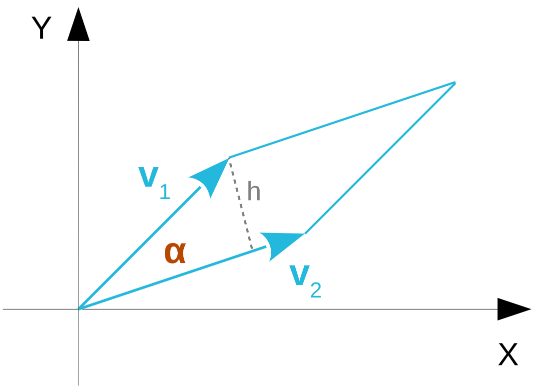
Es ist üblich, zum Rechnen mit Vektoren die Koordinaten des Vektors in einen Spaltenvektor zusammenzufassen und diesen mit dem Vektor zu identifizieren.	$\boldsymbol{v} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Spaltenvektors mit einem Skalar $\boldsymbol{v}_2 = c\ \boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\ x_1 \\ c\ y_1 \end{pmatrix}$

Vektoraddition mit Spaltenvektoren $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

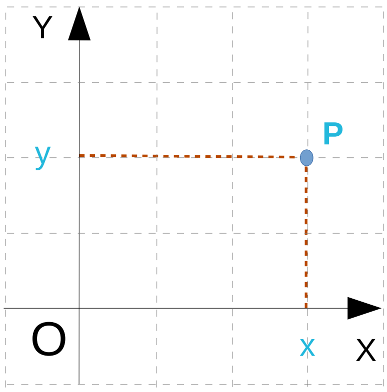
Skalarprodukt (*dot product*) für Vektoren  	$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = v_1\ v_2 \cos\alpha \quad mit \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ Das Skalarprodukt ergibt eine reelle Zahl mit $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \geq 0 \quad für \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 < 0 \quad für \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$ Das Skalarprodukt ist symmetrisch: $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1$
Projiziert man $\mathbf{v}_1$ auf $\mathbf{v}_2$ oder $\mathbf{v}_2$ auf $\mathbf{v}_1$, erhält man die Vektoren $\boldsymbol{v}_{1\to 2}$ oder $\boldsymbol{v}_{2\to 1}$: Mit dem Skalarprodukt erhält man jeweils gerade die Länge des Projektionsvektors.	$\boldsymbol{v}_{1\to 2} = (\hat{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1)\ \hat{\boldsymbol{v}}_2$ $\boldsymbol{v}_{2\to 1} = (\hat{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\ \hat{\boldsymbol{v}}_1$
Für die Basisvektoren gilt:	$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1 \quad \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$
Für das Skalarprodukt gilt das Distributivgesetz:	$\boldsymbol{v}_1 \cdot (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3$
Das Skalarprodukt in Koordinaten ergibt	$v_1 = x_1\ \boldsymbol{e}_x + y_1\ \boldsymbol{e}_y \quad v_2 = x_2\ \boldsymbol{e}_x + y_2\ \boldsymbol{e}_y$

sich sofort aus den Skalarprodukten für die Basisvektoren:	$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x_1\ x_2 + y_1\ y_2$
Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so verschwindet das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Das gilt so für die Basisvektoren $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$:	$\alpha = \frac{\pi}{2} \ \rightarrow\ \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$ $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$
Ist ein Vektor $\mathbf{v}_1$ gegeben, so lässt sich leicht ein Vektor $\mathbf{v}_2$ angeben, der senkrecht auf ersteren steht.	$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x\ y - y\ x = 0$

Kreuzprodukt (*cross product*) oder **Vektorprodukt** zwischen zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ 	$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = v_1\ v_2 \sin\ \alpha$ Der Winkel α ist hier der gerichtete Winkel vom Vektor $\mathbf{v}_1$ zum Vektor $\mathbf{v}_2$. Das Vektorprodukt ist daher antisymmetrisch: $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = -\ \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_1$ Für parallele Vektoren verschwindet das Vektorprodukt, denn dann ist ja α=0. Für die Basisvektoren gilt: $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = 0$ $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = 1 \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -1$
Für das Vektorprodukt gilt das Distributivgesetz:	$\boldsymbol{v}_1 \times (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_3$
Das Vektorprodukt in Koordinaten ergibt sich sofort aus den Vektorprodukten für die Basisvektoren:	$v_1 = x_1\ \boldsymbol{e}_x + y_1\ \boldsymbol{e}_y \qquad v_2 = x_2\ \boldsymbol{e}_x + y_2\ \boldsymbol{e}_y$ $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = x_1\ y_2 - y_1\ x_2$
Die beiden Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen (orientierter) Flächeninhalt F gerade durch das Vektorprodukt der beiden Vektoren gegeben ist:	$h = v_1 \sin\ \alpha$ $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = v_1\ v_2 \sin\ \alpha = v_2\ h = F$
Anmerkung: In drei Dimensionen ist das Kreuzprodukt eine vektorartige Größe (in Richtung der dritten Dimension).	

Punkte

Koordinaten eines Punktes in der Ebene



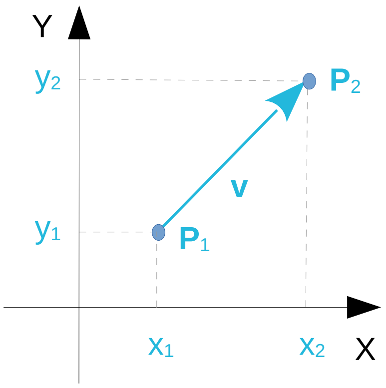
Ich wähle in meinem ebenen Punkteraum E^2 einen willkürlichen Ursprung O und konstruiere mit einem Maßstab und einem Winkelmesser ein rechtwinkliges Koordinatengitter.

Ein Punkt in der Ebene wird durch zwei Koordinaten bestimmt, die als geordnetes Paar aufgeschrieben werden.

$$P = (x, y)$$

Zwei Punkte lassen sich geometrisch durch einen Vektor verbinden; dies führt zu gemischten Operationen zwischen Punkten und Vektoren.

Addition und **Subtraktion** von Punkten und Vektoren



$$P_1 = (x_1, y_1) \qquad P_2 = (x_2, y_2)$$

Der Verbindungsvektor **v** verbindet den Punkt P_1 mit dem Punkt P_2.

$$P_2 - P_1 = \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

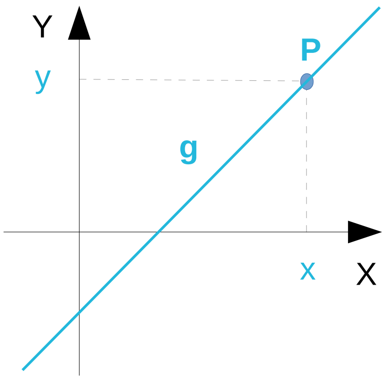
Der Verschiebungsvektor **v** verschiebt den Punkt P_1 hin zu dem Punkt P_2.

$$P_2 = P_1 + \boldsymbol{v}$$

P_1 ist der Angriffspunkt des Vektors **v**, P_2 der Zielpunkt.

Geraden

Implizite Geradengleichung für die Koordinaten



$$G(x,y) = A\ x + B\ y - C$$
$$\quad mit\ \ A,B,C \in \mathbb{R}\ \ und\ \ \sqrt{(A^2+B^2)} = 1$$

Eine Gerade kann mit drei Konstanten A, B und C in impliziter Form durch

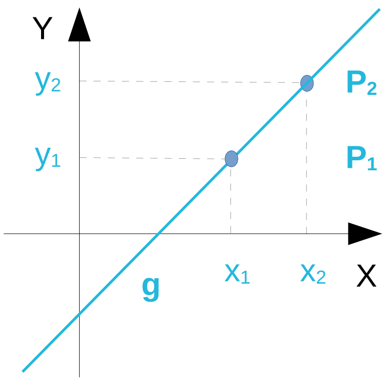
$$g = \{\ P=(x,y)\,|\,G(x,y)=0,\ \ x,y \in \mathbb{R}\ \}$$

definiert werden.

Mit A=0 erhält man die horizontalen Geraden y=C.

Mit B=0 erhält man die vertikalen Geraden x=C.

Sind A und B beide von null verschieden, erhält man die schiefen Geraden.



Zwei Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden g. Es gilt also:

$$G(x_1,y_1) = G(x_2,y_2) = 0$$

Mit

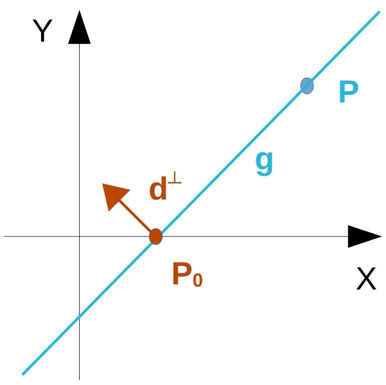
$$a_{12} = |P_2-P_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

erhält man daraus:

$$A = \frac{-1}{a_{12}}(y_2-y_1) \qquad B = \frac{1}{a_{12}}(x_2-x_1)$$

$$C = \frac{1}{a_{12}}(A\,x_1+B\,y_1) = \frac{1}{a_{12}}(x_2\,y_1-x_1\,y_2)$$

Punkt-Normalenform der Geradengleichung



Es sei ein Punkt P_0 auf einer Geraden g gegeben und dazu der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{d}^\perp$, der senkrecht auf der Geraden steht.

Die Gerade lässt sich implizit durch

$$g = \{\ P \in E^2\,|\,\boldsymbol{d}^\perp\cdot(P-P_0) = 0\ \}$$

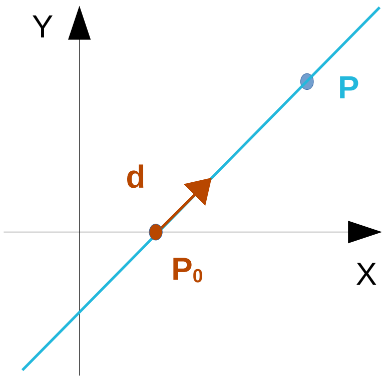
beschreiben, $\mathbf{d}^\perp$ und (P-P_0) stehen senkrecht aufeinander, das Skalarprodukt verschwindet daher.

Mit $\boldsymbol{d}^\perp = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ und $\sqrt{(A^2+B^2)} = 1$ ergibt sich für den Skalarprodukt-Term:

$$\boldsymbol{d}^\perp\cdot(P-P_0) = A\,x+B\,y - (A\,x_0+B\,y_0) = 0$$

A und B bestimmen also den Normalenvektor $\mathbf{d}^\perp$ und C bestimmt den Punkt P_0 auf der Geraden.

Vektorprodukt-Form der Geradengleichung



Es sei ein Punkt P_0 auf einer Geraden g gegeben und dazu der Richtungseinheitsvektor **d** für die Gerade.

Die Gerade lässt sich implizit durch

$$g = \{ P \in E^2 \mid \boldsymbol{d} \times (P - P_0) = 0 \}$$

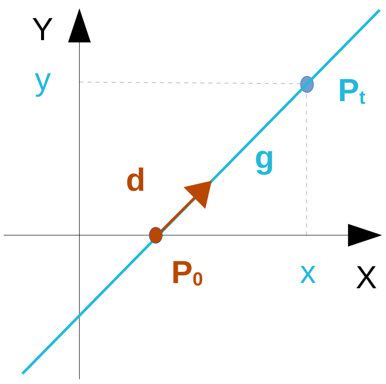
beschreiben, **d** und $(P-P_0)$ sind kollineare (parallele) Vektoren, das Vektorprodukt verschwindet.

Mit $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ und $\sqrt{(A^2+B^2)} = 1$ ergibt sich für den Vektorprodukt-Term wieder:

$$A\,x + B\,y - (A\,x_0 + B\,y_0) = 0$$

A und B bestimmen also den Richtungsvektor **d** und C bestimmt den Punkt P_0 auf der Geraden.

Parametrische Geradengleichung mit einem Richtungsvektor



Anschaulicher ist die parametrische Darstellung der Geraden durch die Vorgabe eines Punktes P_0 auf der Geraden und eines Richtungsvektors **d**, der eben in die Richtung der Geraden zeigt und den Angriffspunkt P_0 hat.

Die Punkte der Geraden erhält man mit:

$$P_t = P_0 + t\,\boldsymbol{d} \qquad t \in \mathbb{R}$$

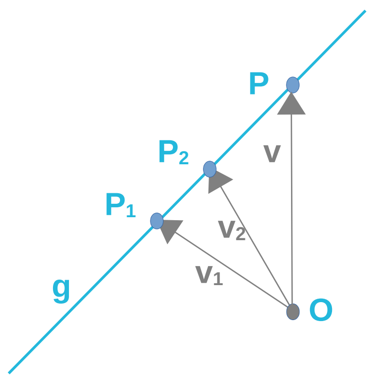
Der Parameter t ist hier das exakte Maß für den Abstand längs der Geraden – die Bogenlänge; so ist

$$|P_{t=1} - P_{t=0}| = |\boldsymbol{d}| = 1$$

Der Zusammenhang von P_0 und **d** mit den drei Konstanten A, B und C der impliziten Form ist wie folgt:

1. Fall: A=0	$P_0 = (0, \frac{C}{B}) \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Fall: B=0	$P_0 = (\frac{C}{A}, 0) \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Fall: $A \neq 0,\ B \neq 0$	$P_0 = (0, \frac{C}{B}) \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \quad \lvert\boldsymbol{d}\rvert = 1$
Der Einheitsvektor, der senkrecht auf der Geraden steht, ist $\mathbf{d}^{\perp}$:	$\boldsymbol{d}^{\perp} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{d}^{\perp} \cdot \boldsymbol{d} = 0$

Teilverhältnis-Form der Geradengleichung



Der Name der Geradengleichung hat mit der linken Gleichung zu tun, die Zahl (1+τ) gibt das Verhältnis der entsprechenden Streckenstücke an.

Zwei Punkte P_1 und P_2 bestimmen eine Gerade g.

Es sei ein weiterer Punkt P auf der Geraden g gegeben; dann gibt es eine reelle Zahl τ, sodass gilt:

$$\boldsymbol{v}(P) = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \tau\,\boldsymbol{v}_2}{1+\tau} \qquad \tau \neq -1$$

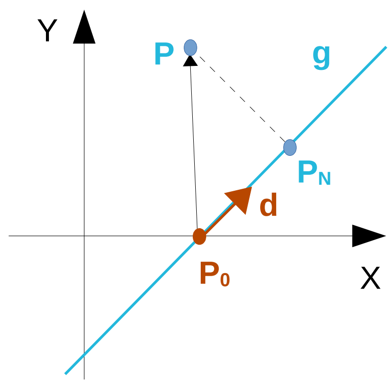
Außer für den Punkt P_2 lässt sich die Gerade durch diese Vektorgleichung parametrisieren, denn sie lässt sich umformulieren in eine parametrische Geradengleichung mit einem Richtungsvektor:

$$\boldsymbol{v}(P) = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \tau\,\boldsymbol{v}_2}{1+\tau} = \boldsymbol{v}_1 + \frac{\tau}{1+\tau}\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right)$$

$$\left|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right| = \left|1+\tau\right| \left|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}\right| = const$$

Wird |τ| größer, so **v** geht auf $\mathbf{v}_2$ zu; nähert sich τ der -1, so muss |**v**| immer größer werden.

Nächster Punkt auf der Geraden



Ein Punkt P und eine Gerade g seien gegeben; gesucht wird der zu P nächstgelegene Punkt auf der Geraden.

Geometrisch gesehen fällt man das Lot auf die Gerade und erreicht den Punkt P_N. Oder man projiziert den Vektor ($P - P_0$) auf die Gerade und erhält den Vektor ($P_N - P_0$), dessen Länge t_N mit dem Skalarprodukt erhalten werden kann:

$$t_N = \boldsymbol{d} \cdot \left(P - P_0\right)$$

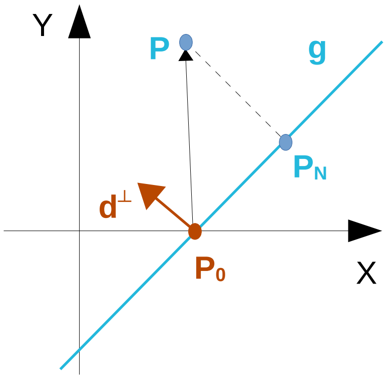
$$P_N = P_0 + t_N\,\boldsymbol{d}$$

Liegt ein Punkt P auf der Geraden g?

Der Punkt P liegt auf der Geraden g, wenn er mit dem nächstgelegenem Geradenpunkt zusammenfällt, wenn also gilt:

$$P = P_N$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden



Es gilt für den vorzeichenbehafteten, gerichteten Abstand a:

$$|a| = |P - P_N|$$
$$P - P_N = (\boldsymbol{d}^{\perp} \cdot (P - P_0))\ \boldsymbol{d}^{\perp}$$
$$a = \boldsymbol{d}^{\perp} \cdot (P - P_0)$$

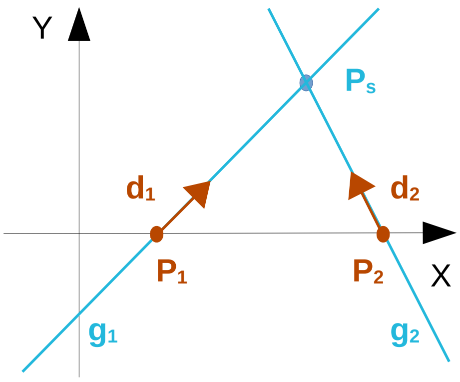
Der Abstand ist positiv, wenn der Punkt P in der Ebenenhälfte liegt, in die der Normalenvektor der Geraden zeigt; er ist negativ, wenn der Punkt in der anderen Ebenenhälfte liegt.

Liegt P auf der Geraden, so ist der Abstand null.

Ist die Gerade durch die Konstanten A, B und C definiert, so ist der gerichtete Abstand a eines Punktes $P=(x_a,y_a)$ von der Geraden gegeben durch:

$$a = G(x_a, y_a) = A\ x_a + B_a\ y - C$$

Schnittpunkt zweier Geraden



$$t_1 = |P_s - P_1| \qquad t_2 = |P_s - P_2|$$
$$P_s = P_1 + t_1\ \boldsymbol{d}_1$$
$$P_s = P_2 + t_2\ \boldsymbol{d}_2$$

Die Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt:

$$P_2 - P_1 = t_2\ \boldsymbol{d}_2 - t_1\ \boldsymbol{d}_1$$

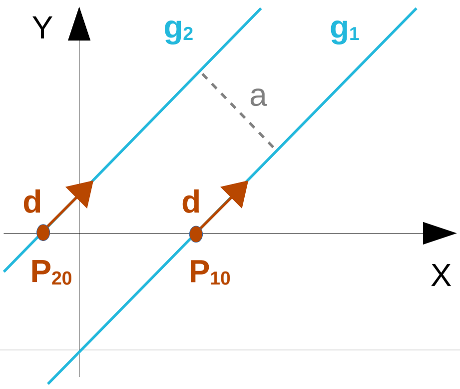
Durch die Herausprojektion von t_2 mit $\boldsymbol{d}_2^{\perp}$ (einem zu $\mathbf{d}_2$ orthogonalen Einheitsvektor) erhält man den Parameter t_1:

$$\boldsymbol{d}_2^{\perp} \cdot \boldsymbol{d}_2 = 0$$
$$(P_2 - P_1) \cdot \boldsymbol{d}_2^{\perp} = -\ t_1\ \boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2^{\perp}$$

Damit ist die Länge t_1 bestimmt und somit auch der Schnittpunkt P_s.

$$P_s = P_1 + t_1\ \boldsymbol{d}_1 \quad \text{mit}$$
$$t_1 = \frac{(P_1 - P_2) \cdot \boldsymbol{d}_2^{\perp}}{\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2^{\perp}}$$

Parallele Geradenschar



$$G(x, y) = A\ x + B\ y - C$$
$$\textit{mit}\quad A, B, C \in \mathbb{R}$$
$$\textit{und}\quad \sqrt{(A^2 + B^2)} = 1$$

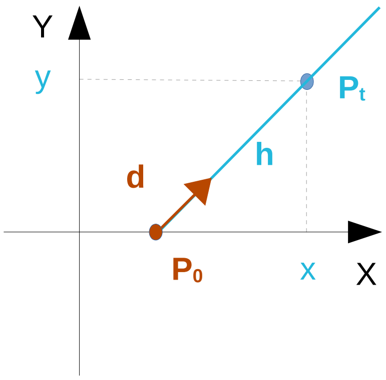
Zwei Geraden g_1 und g_2 sowie eine reelle Zahl a seien gegeben:

$$g_1 = \{\ P=(x, y)\ |\ G(x, y)=0,\ \ x, y \in \mathbb{R}\ \}$$
$$g_2 = \{\ P=(x, y)\ |\ G(x, y)=a,\ \ x, y \in \mathbb{R}\ \}$$

Die Geraden sind offensichtlich parallel:	$\boldsymbol{d_1} = \boldsymbol{d_2} = \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{d}^{\perp} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$
Der Abstand des Geradenpunktes P_{20} auf g_2 von der Geraden g_1 ist gegeben durch: Die beiden Geraden haben den Abstand a.	$P_{10} = (0, \frac{C}{B}) \quad P_{20} = (0, \frac{C+a}{B})$ $\boldsymbol{d}^{\perp} \cdot (P_{20} - P_{10}) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{B} \end{pmatrix} = a$
Mittels g(a) erzeuge ich also eine Schar paralleler Geraden, die jeweils den Abstand a von der Geraden g(0) haben:	$g(a) = \{ (x, y) \mid G(x, y) = a, \ \ x, y \in \mathbb{R} \}$

Halbgeraden

Parametrische Halbgeradengleichung



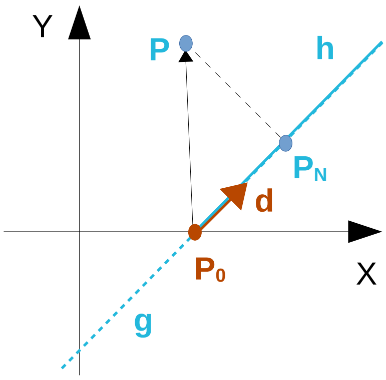
Eine Halbgerade oder auch ein Strahl ist durch die Vorgabe eines Anfangspunktes P_0 der Halbgraden und eines Richtungsvektors **d**, der eben in die Richtung der Halbgeraden zeigt.

Die Punkte der Geraden erhält man mit der parametrischen Gleichung:

$$P_t = P_0 + t\,\boldsymbol{d} \qquad t \in \mathbb{R} \wedge t \geq 0$$

($\wedge$ ist das logische 'und'.)

Nächster Punkt auf der Halbgeraden



Ein Punkt P und eine Halberade h seien gegeben; gesucht wird der zu P nächstgelegene Punkt auf der Halbgeraden.

Man erweitert die Halbgerade h zu einer Geraden g, fällt das Lot auf die Gerade und erreicht den Geradenpunkt P_N mit

$$t_N = \boldsymbol{d} \cdot (P - P_0)$$

Ist $t_N \leq 0$, so ist der nächste Punkt auf der Halbgeraden der Anfangspunkt der Halbgeraden P_0, ansonsten ist es der Punkt

$$P_N = P_0 + t_N\,\boldsymbol{d}$$

Liegt ein Punkt P innerhalb der Halbgeraden h?

Der nächste Punkt auf der Halbgeraden h sei der Punkt P_N; der Punkt P liegt innerhalb der Halbgraden, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

P_N ist nicht der Anfangspunkt P_0 der Halbgeraden, ansonsten liegt der Punkt innerhalb der Halbgeraden, wenn gilt $P = P_N$ (oder $|(P - P_N)| \leq \epsilon$, will man per Software Fließkommazahlen vergleichen, mit einem dem Problem angemessenen ε > 0).

Schnittpunkt zweier Halbgeraden

Ein Kollege aus alten Tagen hat den damaligen Quellcode – in Ada geschrieben – mit einer Strichzeichnung versehen:

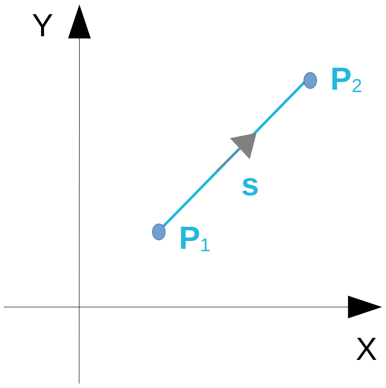
```
-- This function returns true, if one ray intersects the other one inside:
-- a)
--
--              ^
--              |
--    R1        | R2
-- *------->    |
--              |
--              *
-- b)
--    R1
-- *------->
--
--              ^
--              |
--              |
--              | R2
--              |
--              *
-- c)
--     R1              R2
-- *-------->    *-------->
--
-- d)
--     R1              R2
-- *-------->    <--------*
--
-- in the following example the ray is not intersecting  i n s i d e
--
--    R1
--              ^
--              |
--              |
--              |R2    => return false
--    R1        |
-- *------->    *
--
```

```
-- R1 and R2 are parallel
-- Now there are two possibilities:
--
-- a) the rays are on the same line
--    and might have                          Sp1   R1      Sp2   R2
--    a1) the same direction                   *-------->    *-------->
--    a2) diametrical directions
--        pointing to each other               *-------->    <--------*
--    a3) diametrical directions
--        pointing in different directions     <--------*  *-------->

-- b) the rays are on different lines          *-------->
--                                                  <-------*
--
-- the rays are intersecting only in case a1) and a2)
-- In this cases the start point of at least one ray is in the other ray:
```

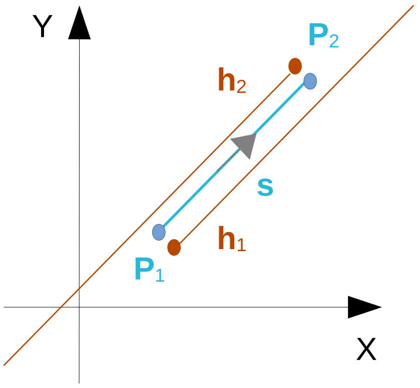
0) Der Schnittpunkt der Halbgeraden soll *innerhalb* der Halbgeraden liegen. (Zwei Halbgeraden mit dem gleichen Anfangspunkt haben mindestens einen Punkt gemeinsam, haben aber keinen Schnittpunkt.) 1) Man erweitert die beiden Halbgeraden zu Geraden. 2) Sind die beiden Geraden (echt) parallel (mit einem Abstand größer null), so gibt es keinen Schnittpunkt.	3) Sind die beiden Geraden gleich, so gibt es entweder keinen Schnittpunkt oder aber sozusagen unendlich viele. 4) Nun müssen sich die beiden Geraden in einem Punkt P_S schneiden. Liegt dieser Punkt P_S nun innerhalb *beider* Halbgeraden, so ist P_S der gesuchte Schnittpunkt, ansonsten gibt es keinen Schnittpunkt.

Strecken



Eine gerichte Strecke oder ein gerichtetes Liniensegment wird durch zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Richtung bestimmt, die Strecke ‚verläuft' vom ersten Punkt P_1 zum zweiten Punkt P_2.

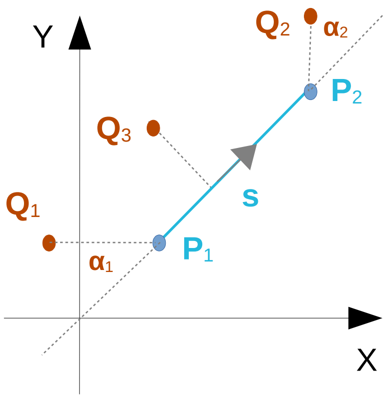
Liegt ein Punkt P innerhalb des Liniensegments?



Das Liniensegment s wird durch zwei Halbgeraden h_1 und h_2 erweitert. In der Zeichnung sind die Halbgeraden etwas versetzt eingezeichnet; die Halbgerade h_1 beginnt im Punkt P_1 und ist in die Richtung der Strecke s gerichtet; die Halbgerade h_2 beginnt im Punkt P_2 und ist entgegen der Streckenrichtung gerichtet.

Ein Punkt P liegt innerhalb des Liniensegmentes, wenn er innerhalb *beider* Halbgeraden liegt.

Abstand eines Punktes vom Liniensegment



$P_1=(x_1, y_1)$ $P_2=(x_2, y_2)$

Erweitere das Liniensegment s zu einer Geraden g durch P_1 und P_2. $\boldsymbol{d}^{\perp}$ ist der Normalenvektor auf der Geraden g und auf dem Liniensegment s.

1) Falls für den Punkt, hier Q_1 genannt, gilt:

$$(Q_1-P_1)\cdot(P_1-P_2) > 0 \quad \left(also \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

dann ist der Abstandsbetrag gegeben durch:

$$|a_1| = |Q_1-P_1|$$

Das Vorzeichen des Abstandes a_1 bestimmt sich aus dem Vorzeichen des Skalarprodukte

$$\boldsymbol{d}^{\perp}\cdot(Q_1-P_1)$$

2) Falls für den Punkt Q_1, gilt:

$$(Q_2-P_2)\cdot(P_2-P_1) > 0 \quad \left(also \quad 0 \leqslant \alpha_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

dann ist der Abstandbetrag.

$$|a_2| = |Q_2-P_2|$$

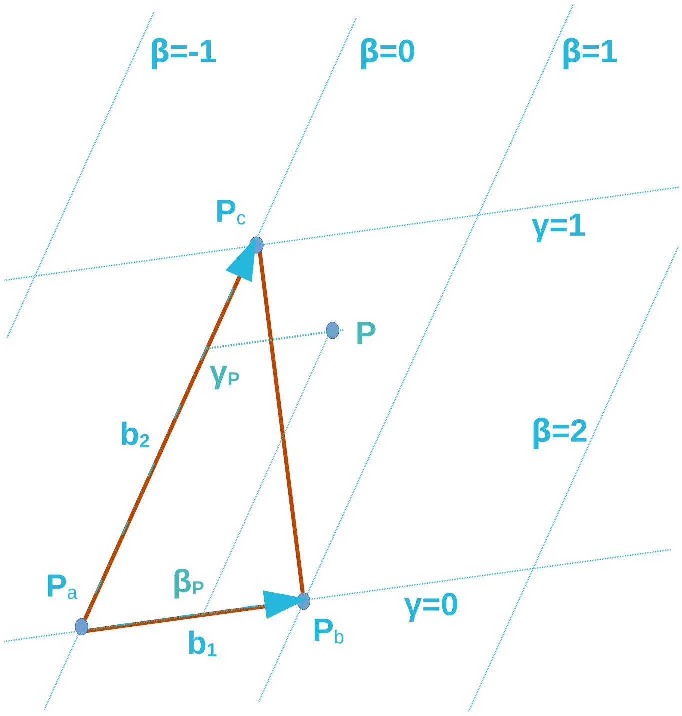
Das Vorzeichen des Abstandes a_2 bestimmt sich aus dem Vorzeichen des Skalarproduktes

$$\boldsymbol{d}^{\perp}\cdot(Q_2-P_2)$$

3) Ansonsten bestimme den Abstand des Punktes, hier Q_3, von der Geraden g.

Dreiecksflächen

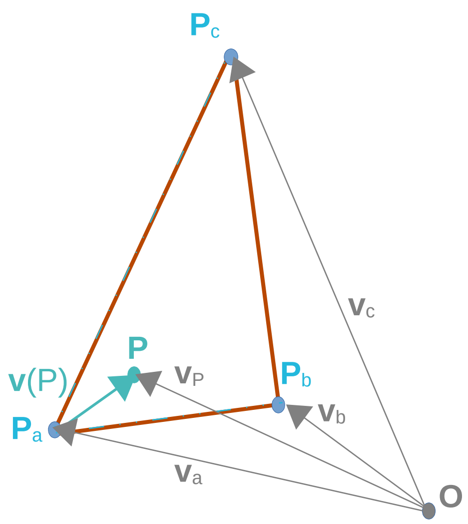
Nicht-orthonormale Koordinatensysteme



Die beiden linear-unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = P_b - P_a$ und $\boldsymbol{b}_2 = P_c - P_a$ bilden die Basisvektoren des Koordinatensystems. Längen werden in Vielfachen der Längen der Basisvektoren gemessen.

Ein beliebiger Punkt P hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten β_P und γ_P. Es gilt für den Vektor **v**(P) von P_a nach P:	$\boldsymbol{b}_1 = P_b - P_a \quad \boldsymbol{b}_2 = P_c - P_a$ $P = (\beta_P, \gamma_P)$ $\boldsymbol{v}(P) = P - P_a = \beta_P \boldsymbol{b}_1 + \gamma_P \boldsymbol{b}_2$
Den P selbst erhält man aus dem Punkt P_a mit den eingeklammerten Verschiebungsvektor:	$P = P_a + (\beta_P \boldsymbol{b}_1 + \gamma_P \boldsymbol{b}_2)$

Baryzentrische Koordinaten



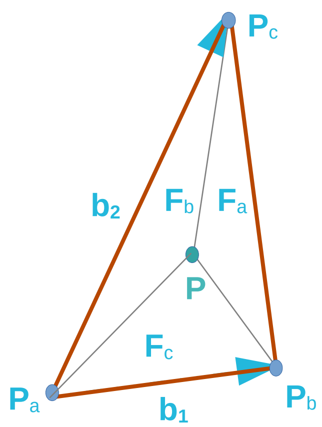
$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}(P)$$
$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_a + \beta_P\,(\boldsymbol{v}_b - \boldsymbol{v}_a) + \gamma_P\,(\boldsymbol{v}_c - \boldsymbol{v}_a)$$
$$\boldsymbol{v}_P = (1-\beta_P-\gamma_P)\,\boldsymbol{v}_a + \beta_P\,\boldsymbol{v}_b + \gamma_P\,\boldsymbol{v}_c$$

$$\alpha_P = (1-\beta_P-\gamma_P)$$
$$\boldsymbol{v}_P = \alpha_P\,\boldsymbol{v}_a + \beta_P\,\boldsymbol{v}_b + \gamma_P\,\boldsymbol{v}_c$$

Das Koordinatentripel (α_P, β_P, γ_P) mit der aufgeführten Nebenbedingung sind die baryzentrischen Koordinaten eines beliebigen Punktes P:

$$P = (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \qquad 1 = \alpha_p + \beta_P + \gamma_P$$

Berechnung der Baryzentrische Koordinaten



Der vorzeichenbehaftete Flächeninhalt des durch die drei Punkte P_a, P_b und P_c aufgespannten Dreiecks ist:

$$F_\triangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2)$$

Der Flächeninhalt ist positiv, wenn die Dreieckspunkte gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden oder auch, wenn der erste Vektor gegen den Uhrzeigersinn auf den zweiten gedreht wird.

Der Punkt P bildet mit den drei Kanten des Dreiecks drei weitere Dreiecke mit den Flächeninhalten F_a, F_b und F_c. Deren Inhalte sind:

Man braucht hierzu die distributive Rechenregel

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

und

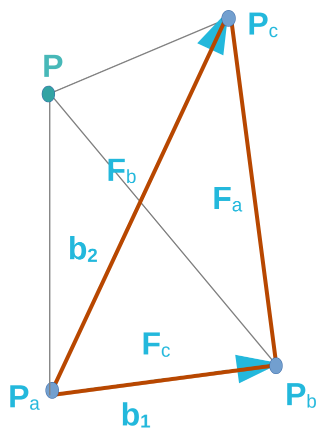
$$P_2 - (P_1 + \boldsymbol{a}) = (P_2 - P_1) - \boldsymbol{a}$$

$$F_c(P) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times (P - P_a))$$
$$F_c(P) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times (\beta_P\,\boldsymbol{b}_1 + \gamma_P\,\boldsymbol{b}_2))$$
$$F_c(P) = \gamma_P\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) = \gamma_P\,F_\triangle$$

$$F_a(P) = \frac{1}{2}\,((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times (P - P_b))$$
$$F_a(P) = \frac{1}{2}\,((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times (P - P_b))$$
$$F_a(P) = \frac{1}{2}\,((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times (P - (P_a + \boldsymbol{b}_1)))$$

$$F_b(P) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}_2 \times (P - P_c))$$
$$F_b(P) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}_2 \times (P - P_c))$$
$$F_b(P) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}_2 \times ((P - P_a) - \boldsymbol{b}_2))$$
$$F_b(P) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}_2 \times (P - P_a))$$

$F_a(P) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times ((P - P_a) - \boldsymbol{b}_1)\right)$ $F_a(P) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times ((\beta_P \boldsymbol{b}_1 + \gamma_P \boldsymbol{b}_2) - \boldsymbol{b}_1)\right)$ $F_a(P) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times (\beta_P \boldsymbol{b}_1 + (\gamma_P - 1)\boldsymbol{b}_2)\right)$ $F_a(P) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1) \times (\beta_P \boldsymbol{b}_1 + (\gamma_P - 1)\boldsymbol{b}_2)\right)$ $F_a(P) = \frac{1}{2}(1 - \beta_P - \gamma_P)(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2)$ $F_a(P) = (1 - \beta_P - \gamma_P)\, F = \alpha_p\, F_\triangle$	$F_b(P) = \frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{b}_2 \times (\beta_P \boldsymbol{b}_1 + \gamma_P \boldsymbol{b}_2)\right)$ $F_b(P) = \beta_P\, \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) = \beta_P\, F_\triangle$
$\alpha_p + \beta_P + \gamma_P = 1$	$F_a(P) + F_b(P) + F_c(P) = F_\triangle$
$\beta_p = \frac{F_b(P)}{F_\triangle}$ $\quad F_b(P) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_2 \times (P_c - P))$ $\gamma_p = \frac{F_c(P)}{F_\triangle}$ $\quad F_c(P) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 \times (P - P_a))$ $\alpha_p = 1 - \beta_P - \gamma_P$	



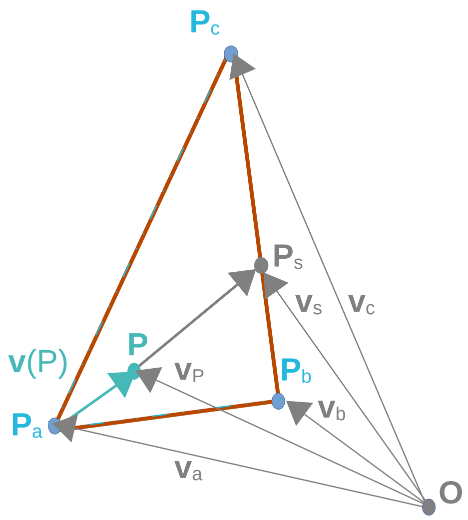
Obige Rechnungen gelten auch, wenn der Prüfpunkt P nicht im Innern des Dreiecks liegt.

So ist etwa der Flächeninhalt

$$F_b(P) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}_2 \times (P - P_c))$$

für einen Punkt P zur linken des Dreiecks negativ, so dass die Summe der drei Teildreiecke sich in der Tat zum Flächeninhalt des Dreiecks aufaddieren können.

Punkt im Dreieck



Drei unabhängige Punkte P_1, P_2 und P_3 spannen ein Dreieck auf. Ein Punkt P ist ein Dreieckspunkt, liegt also auf den Kanten oder innerhalb des Dreiecks, genau dann, wenn 1) und 2) gilt:

1) $\boldsymbol{v}_P = \dfrac{\boldsymbol{v}_a + \lambda\, \boldsymbol{v}_s}{1+\lambda} \qquad \lambda \geq 0$

2) $\boldsymbol{v}_s = \dfrac{\boldsymbol{v}_b + \mu\, \boldsymbol{v}_c}{1+\mu} \qquad \mu \geq 0$

Hier kommt zweimal die Teilverhältnis-Form der Geradengleichung zum Einsatz.

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, ergibt sich:

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{1}{1+\lambda}\,\boldsymbol{v}_a + \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\,\boldsymbol{v}_b + \frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\,\boldsymbol{v}_c$$

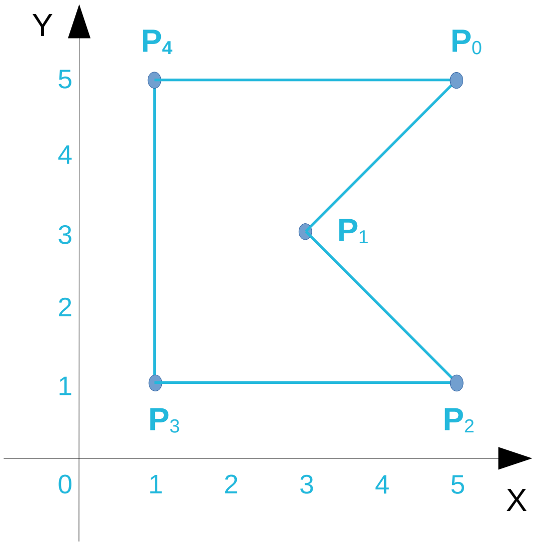
$$\alpha_P = \frac{1}{1+\lambda} \qquad \beta_P = \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} \qquad \gamma_P = \frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

$$\boldsymbol{v}_P = \alpha_P\,\boldsymbol{v}_a + \beta_P\,\boldsymbol{v}_b + \gamma_P\,\boldsymbol{v}_c \qquad 0 \leq \alpha_p, \beta_P, \gamma_P \leq 1 \qquad 1 = \alpha_p + \beta_P + \gamma_P$$

Ein Punkt P ist ein Dreieckspunkt, liegt also auf den Kanten oder innerhalb des Dreiecks, genau dann, wenn die baryzentrischen Koordinaten des Punktes (α_P, β_P, γ_P) die Bedingung $0 \leq \alpha_p, \beta_P, \gamma_P \leq 1$ erfüllen.

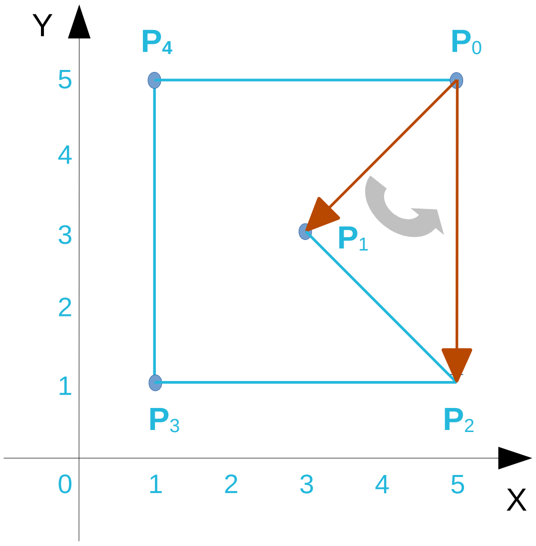
Polygone

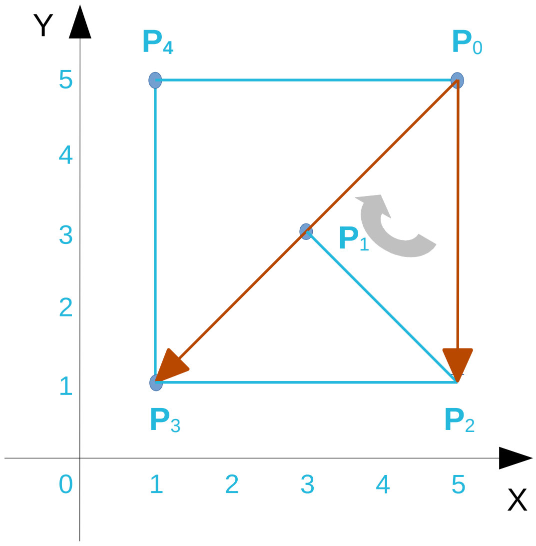
Flächeninhalt



$$P_0 = (5,5) \qquad P_1 = (3,3)$$
$$P_2 = (5,1)$$
$$P_3 = (1,1) \qquad P_4 = (1,5)$$
$$2\,F_{012} = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$$

$$2\,F_{034} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -16$$
$$F_{01234} = -12$$



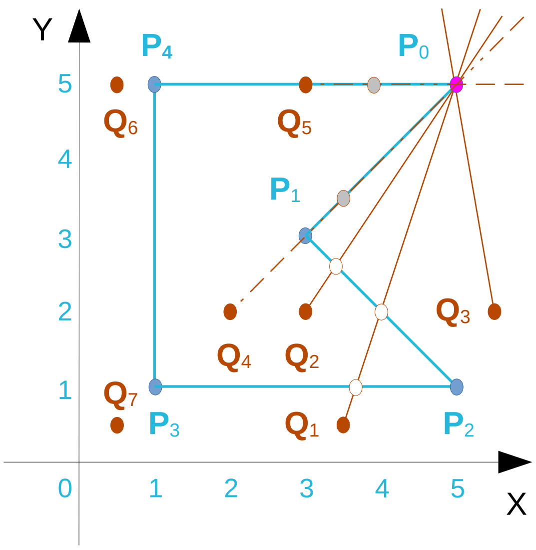


Der erste Vektor (P_1-P_0) wird im Uhrzeigersinne auf den zweiten (P_2-P_0) gedreht: das Vektorprodukt ist positiv.

Der erste Vektor (P_2-P_0) wird entgegen dem Uhrzeigersinne auf den zweiten (P_3-P_0) gedreht: das Vektorprodukt ist negativ.

Das Vorzeichen von F ist hier negativ, da die Polygonpunkte bei der Berechnung des Flächeninhalts mit dem Vektorprodukt im Uhrzeigersinne durchlaufen werden.

Punkt in Polygon



Wann liegt ein Punkt innerhalb eines beliebigen Polygons?

Ich kenne eine doch *sehr längliche* Implementierung eines Rechenverfahrens, die zählt, wie oft eine Gerade durch den Prüfpunkt Q_k und einen Polygonpunkt P_0 die Kanten des Polygons schneiden.

In der 'GNAT Components Collection' gibt es allerdings einen *knackig-kurzen* Algorithmus, den ich aber erst noch durchschauen muss, um ihn hieer präsentieren zu können.

<u>Da bleibt also noch etwas zu tun :-)</u>

05.03.2016
26.02.2023
22.12.2023